

## УЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ

А.И. Мошинский, П.Г. Ганин, А.В. Маркова, Л.Н. Рубцова, В.В. Сорокин

Александр Иванович Мошинский, Павел Георгиевич Ганин, Алла Валентиновна Маркова,  
Лариса Николаевна Рубцова \*, Владислав Валерьевич Сорокин

Кафедра процессов и аппаратов химической технологии, Санкт-Петербургский государственный  
химико-фармацевтический университет, ул. Проф. Попова 14, Санкт-Петербург, Российская Федера-  
ция, 197376

E-mail: alex-moshinskij@yandex.ru, ganin-pavel-53@mail.ru, alla.markova@pharminnotech.com, larisapns@mail.ru \*,  
spsra@outlook.com

*В настоящей работе исследуется задача конденсации пара на плоскую верти-  
кальную поверхность в случае произвольной зависимости коэффициента динамической вяз-  
кости от температуры по достаточно общему закону. При постоянном значении этого  
коэффициента и других неизменных характеристиках конденсирующейся жидкости (ко-  
эффициент теплопроводности, плотность) данная задача, в постоянном гравитационном  
поле, была рассмотрена Нуссельтом. Результаты, полученные Нуссельтом, легли в основу  
(при определенных доработках) расчетной практики теплообменной аппаратуры химиче-  
ской технологии при наличии конденсации пара какого-либо теплоносителя. Образование  
пленки конденсата происходит вследствие теплопереноса внутри пленки, конденсации па-  
ра на внешней границе пленки и течения жидкости. В статье проведено обобщение теории  
Нуссельта для коэффициента теплоотдачи при отмеченных условиях, и, как результат,  
получены удобные расчетные формулы для коэффициента теплоотдачи, необходимые для  
описания работы теплообменной аппаратуры. Предложены приближённые соотно-  
шения для расчета коэффициента динамической вязкости, полезные для расчета пленоч-  
ного течения на плоской поверхности. Проведено сравнение с ранее используемыми соот-  
ношениями, приближенным образом учитывающими зависимость коэффициента динами-  
ческой вязкости от температуры. Когда в технических приложениях хотят определить  
среднее значение для двух параметров, которые затем используются для расчета некото-  
рой характеристики процесса, то традиционно берут среднее арифметическое этих пара-  
метров. В статье показано, что, упрощая зависимость для эффективного коэффициента  
динамической вязкости, более точные результаты будут при разделении интервала (для  
текущей пленки) в отношении три к одному считая от стенки. Представленные в работе  
аналитические зависимости можно использовать для практических расчетов теплооб-  
менной аппаратуры.*

**Ключевые слова:** конденсация, теплоотдача, коэффициент вязкости, средняя температура по-  
верхности стенки

## TAKING INTO ACCOUNT DEPENDENCE OF VISCOSITY COEFFICIENT ON TEMPERATURE DURING VAPOR CONDENSATION ON A VERTICAL WALL

A.I. Moshinskiy, P.G. Ganin, A.A. Markova, L.N. Rubtsova, V.V. Sorokin

Aleksandr I. Moshinskiy, Pavel G. Ganin, Alla V. Markova, Larisa N. Rubtsova \*, Vladislav V. Sorokin  
Department of Processes and Apparatuses of Chemical Technology, St. Petersburg State University of Chemis-  
try and Pharmacy, prof. Popova st., 14, Saint Petersburg, 197376, Russia

E-mail: alex-moshinskij@yandex.ru, ganin-pavel-53@mail.ru, alla.markova@pharminnotech.com, larisapns@mail.ru \*,  
spsra@outlook.com

*In the present study, the problem of vapor condensation on a flat vertical surface is investigated in the case of an arbitrary dependence of the dynamic viscosity coefficient on temperature according to a fairly general law. At a constant value of this coefficient and other characteristics of a condensing liquid (heat conductivity coefficient, density) this task was considered by Nusselt in a constant gravitational field. The results obtained by Nusselt formed the basis (with certain modifications) for the computational practice of heat exchange equipment of chemical technology in the presence of steam condensation of any heat carrier. Formation of a condensate film occurs due to heat transfer through the liquid film, vapor condensation at the outer edge of the film and the flow of liquid along the surface. The article generalizes the Nusselt theory for the heat transfer coefficient under the indicated conditions, and as a result, convenient calculation formulas for the heat transfer coefficient, which are necessary to describe the operation of heat and mass exchange equipment. Approximate relations are proposed for calculating the dynamic viscosity coefficient, which are useful for calculating film flow on a flat surface. A comparison is made with the previously used ratios in an approximate manner taking into account the dependence of viscosity coefficient on temperature. When in technical applications one wants to determine the average value of two parameters, which are then used to calculate certain characteristics of a process, then, traditionally, the average of these parameters is considered. This article shows that by simplifying the dependence of the effective dynamic viscosity coefficient, more accurate results are obtained by dividing the interval of the width of the current film in the ratio of three to one, where three fourths refer to the wall temperature, and one fourth to the condensation temperature. The analytical dependencies presented in this paper can be used for practical calculations of the heat exchange equipment.*

**Key words:** condensation, heat transfer, viscosity coefficient

**Для цитирования:**

Мошинский А.И., Ганин П.Г., Маркова А.В., Рубцова Л.Н., Сорокин В.В. Учет зависимости коэффициента вязкости от температуры при конденсации пара на вертикальной стенке. *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2020. Т. 63. Вып. 5. С. 94–101

**For citation:**

Moshinskiy A.I., Ganin P.G., Markova A.A., Rubtsova L.N., Sorokin V.V. Taking into account dependence of viscosity coefficient on temperature during vapor condensation on a vertical wall. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* [Russ. J. Chem. & Chem. Tech.]. 2020. V. 63. N 5. P. 94–101

**ВВЕДЕНИЕ**

В теплообменной аппаратуре химической технологии часто используют конденсирующийся пар в качестве одного из теплоносителей. Как известно, в этом случае на теплообменной поверхности образуется пленка жидкости, которая стекает под действием силы тяжести. При этом толщина пленки меняется вдоль поверхности. Образование пленки конденсата происходит вследствие смачивания пленки конденсатом. Увеличение толщины пленки обусловлено теплопереносом внутри пленки, конденсацией пара на внешней границе пленки и течением конденсата под действием силы тяжести.

В простейшем случае, когда коэффициенты вязкости, теплопроводности и другие физико-химические характеристики, влияющие на процесс, – постоянные величины, решение обсуждаемой задачи было получено Нуссельтом [1, 2], и с тех пор широко используется для расчета тепло-

обменных процессов в химической технологии и других областях. Своим успехом теория Нуссельта обязана тому, что она точно описывает зависимость коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  от всех физико-химических характеристик процесса. Единственное, что принимают для более точного соответствия теории и эксперимента, это введение некоторых поправочных множителей в формулу Нуссельта.

Формула Нуссельта для коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  при расчете теплообменной аппаратуры находит широкое применение на практике. Ее вывод и обсуждение можно встретить в некоторых учебниках и монографиях [2-7]. Она имеет следующий вид:

$$\alpha = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 r \rho^2 g}{4 \mu L \Delta t}}, \quad (1)$$

где:  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости, Па·с;  $r$  – удельная теплота конденсации, Дж/кг;  $\Delta t = t_k - t_w$  – разность температур;

$L$  – длина участка пленки, м;  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\text{м}\cdot\text{с}^{-2}$ . Здесь и далее, нижние индексы « $w$ » и « $k$ » относятся к параметру на стенке и к параметру при конденсации, соответственно.

В тех случаях, когда физические свойства среды заметно зависят от температуры, предлагают различные приемы по учету этого обстоятельства. Так, в частности в работе [2] предлагается вычислить их по средней температуре  $(t_w + t_k)/2$ . Поскольку наиболее существенно меняется с температурой коэффициент  $\mu$ , то из всех параметров, входящих в выражение (1) будем считать функцией температуры только  $\mu$ , что соответствует теме работы.

Таким образом, в [2] предлагается заметить влияние непостоянства коэффициента вязкости на всем интервале температур  $t \in (t_w; t_k)$  эффективным коэффициентом:

$$\mu_* = \mu \left( \frac{t_w + t_k}{2} \right), \quad (2)$$

Широко используется на практике и следующий поправочный множитель Лабунцова Д.А., определенный для случая  $\lambda = \text{const}$  [8-10]:

$$\varepsilon_t = \left( \frac{\mu_k}{\mu_w} \right)^{\frac{1}{8}}, \quad 0,1 \leq \mu_k / \mu_w \leq 1, \quad (3)$$

где  $\mu_k = \mu(t_k)$ ;  $\mu_w = \mu(t_w)$ ; т.е. значения коэффициентов вязкости при температуре конденсации и стенки соответственно.

Формула (3) проверена (рекомендована) [8] при  $0,1 \leq \mu_k / \mu_w \leq 1$ . Она получена на основе зависимости Воскресенского К.Д. [8] при условии небольших перепадов температур в пленке, точнее, когда изменения параметров от температуры в интервале  $(t_w, t_k)$  допустимо аппроксимировать линейными функциями. В частности, в работе [8] для расчета  $\mu$  использована зависимость  $\mu^{-1} = \mu_w^{-1} + (\mu_k^{-1} - \mu_w^{-1})(t - t_w)/(t_k - t_w)$ , точность которой может оказаться (как показано ниже) недостаточной для практики, например для такого распространенного теплоносителя как вода.

Отметим также, что построение эмпирических (приближенных) формул для поправки на основе небольшого числа испытуемых жидкостей может оказаться неточным для других (непроверенных) жидкостей даже при выполнении неравенства в соотношении (3) (и соответствующего неравенства для коэффициента теплопроводности [8-10]), если функциональная зависимость коэффициента вязкости от температуры будет определенным образом отличаться у непроверенных жидкостей.

Основные цели работы:

1. Обобщение теории Нуссельта в случае зависимости коэффициента вязкости от температуры.

2. Сопоставление полученных формул с известными в литературе соотношениями для коэффициента вязкости.

Работа актуальна также в плане разработки новых материалов, когда свойства сред (в частности коэффициент вязкости) могут описываться новыми нетипичными зависимостями.

Подстановка множителя  $\varepsilon_t$  (3) в формулу (1) показывает, что в работах [3-7,10] фактически предлагают также использовать некоторый эффективный коэффициент вязкости, рассчитываемый по формуле:

$$\mu_* = \sqrt{\mu_k \mu_w}, \quad (4)$$

не совпадающей с формулой (2). Отметим, что совпадение возможно только при равенстве  $t_k = t_w$ .

Методика вывода уравнения типа Нуссельта [2, 11, 12] заключается в нахождении расхода жидкости в бесконечной пленке, стекающей по поверхности, и имеющей постоянную толщину  $h$ . Далее составляется уравнение материального баланса, в котором  $h$  уже может меняться как во времени, так и по продольной течению координате  $x$ . Обоснование подобной процедуры при не слишком резких изменениях формы пленки может быть проведено методом возмущений [13, 14].

#### ВЫВОД И АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ

*Постановка и решение необходимых задач теплопереноса и гидродинамики*

Теория Нуссельта базируется на следующих предположениях и допущениях [2]: 1) Ламинарный характер течения жидкости в пленке. 2) Пренебрежение силами инерции. 3) Пренебрежение силами поверхностного натяжения. 4) Отсутствие движения пара, т. е. нет трения между жидкостью и паром на поверхности раздела фаз. 5) Пренебрежение конвективным движением тепла. 6) Температура жидкости у стенки равна  $t_w$  – температуре стенки, на внешней границе пленки, обращенной к пару, температура равна температуре конденсации  $t_k$ .

Наиболее просто решается уравнение теплопроводности в пленке. Согласно вышесказанному, при отмеченных (общепринятых) допущениях [2,8, 9], это уравнение имеет вид:

$$d^2T/dy^2 = 0, \quad (5)$$

где  $T = t + 273$  – абсолютная температура;  $y$  – линейная координата нормальная к течению жидкости (к твердой поверхности, по которой происходит течение).

На рис. 1 отражены граничные условия для уравнения (5):

$$T|_{y=0} = T_w, \quad T|_{y=h} = T_k. \quad (6)$$

Решение задачи (5), (6) следующее:

$$T = T_w + \frac{T_k - T_w}{h} y \Rightarrow y = \frac{T - T_w}{\Delta T} h, \quad (7)$$

где  $\Delta T = T_k - T_w = \Delta t$ .

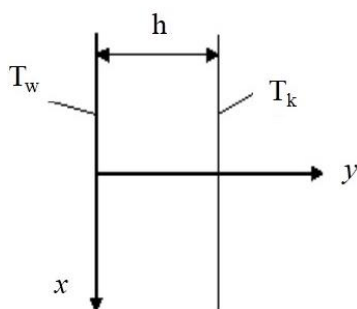


Рис. 1. Область течения пленки жидкости.  $T_w$  – абсолютная температура на стенке,  $T_k$  – абсолютная температура при конденсации,  $h$  – толщина пленки жидкости, стекающей по твердой поверхности,  $m$ ;  $x$  – линейная координата продольная течению жидкости;  $y$  – линейная координата нормальная к течению жидкости

Fig. 1. The flow area of the liquid film.  $T_w$  – is the absolute temperature at the wall,  $T_k$  – the absolute temperature at condensation,  $h$  – film thickness of liquid flowing over a solid surface,  $m$ ;  $x$  – linear coordinate longitudinal to fluid flow;  $y$  – the linear coordinate normal to the fluid flow

Уравнение движения для стекающей пленки будет одномерным [2, 11, 12]. С учетом зависимости вязкости от температуры оно примет вид:

$$\frac{d}{dy} \mu(T) \frac{du}{dy} = -\rho g. \quad (8)$$

здесь  $u$  – скорость жидкости в пленке.

Граничные условия к уравнению (8):

$$u|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = 0, \quad (9)$$

выражают прилипание жидкости при  $y = 0$  и пренебрежение влиянием трения о газ при  $y = h$  на течение в пленке. Температуру в формуле для коэффициента динамической вязкости  $\mu(T)$  следует связать с координатой  $y$  согласно формуле (7). Проинтегрируем один раз уравнение (8) при учете второго условия (9), получаем:

$$\mu(T) \frac{du}{dy} = \rho g (h - y). \quad (10)$$

Для вывода уравнения, определяющего форму пленки, нам понадобится найти зависимость объёмного расхода жидкости  $Q$  от параметров задачи. Имеем:

$$\begin{aligned} Q &\stackrel{1}{=} \int_0^h u(y) dy \stackrel{2}{=} u(y-h)|_{y=0}^{y=h} + \\ &+ \int_0^h (h-y) \frac{du}{dy} dy \stackrel{3}{=} \rho g \int_0^h \frac{(h-y)^2 dy}{\mu(T)} \stackrel{4}{=} \\ &\stackrel{4}{=} \frac{\rho g h^3}{(\Delta T)^3} \int_{T_w}^{T_k} \frac{(T_k - T)^2 dT}{\mu(T)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где равенство 1 – определение расхода (на единицу длины, поскольку мы рассматриваем «плос-

кую» задачу), 2 – интегрирование по частям (надо учесть первое условие (9)), 3 – замена  $du/dy$  согласно соотношению (10), 4 – замена переменной интегрирования  $y$  на  $T$  согласно второй формуле (7).

Введем коэффициент эффективной вязкости  $\mu_*$ :

$$\frac{1}{\mu_*} = \frac{3}{(\Delta T)^3} \int_{T_w}^{T_k} \frac{(T_k - T)^2 dT}{\mu(T)}. \quad (12)$$

Легко проверить, что при  $\mu(t) = \mu = \text{const}$  приходим к естественному результату  $\mu_* = \mu$ , т.е. возвращаемся к случаю, рассмотренному Нуссельтом. Соотношения (11) и (12) позволяют получить для величины расхода точно такое же выражение, что и для варианта Нуссельта [2], только вместо обычного коэффициента вязкости  $\mu$  следует использовать эффективный коэффициент. Данное обстоятельство является очень важным и неожиданным результатом. Итак,

$$Q = \frac{\rho g h^3}{3\mu_*}. \quad (13)$$

*Вывод уравнения для формы пленки*

Теперь обычный материальный баланс [2], связывающий поток тепла:

$$q = -\lambda dT/dy|_{y=h} = -\lambda \Delta T/h, \quad (14)$$

с потоком конденсата при помощи удельной теплоты конденсации  $r$ , позволяет получить уравнение для формы пленки в стационарном случае ( $h = \text{const}(\tau)$  – т.е. параметр  $h$  не зависит времени)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\lambda \Delta T}{\rho r h} \Rightarrow \frac{\rho^2 g h^2}{\mu_*} \frac{dh}{dx} = \frac{\lambda \Delta T}{r h}. \quad (15)$$

Роль тепловых процессов сводится к образованию источника массы в уравнении материального баланса (15).

Таким образом, получено уравнение, по форме совпадающее с известным уравнением Нуссельта [2], но с эффективным значением коэффициента вязкости. Поэтому все формулы теории Нуссельта, в частности (1), сохраняют свой вид при замене  $\mu \rightarrow \mu_*$ .

*Вывод приближенной формулы для коэффициента вязкости*

Поскольку здесь мы рассматриваем зависимость от температуры только для коэффициента вязкости, то целесообразно проводить сравнение нашей формулы (12) с известными зависимостями только для этого коэффициента. При небольших значениях  $\Delta T/T_k$  можно получить простую приближенную формулу для эффективного коэффициента вязкости, используя точную зависимость (12). Функцию  $\mu(t)$  будем считать разложимой в ряд Тейлора в окрестности точки  $t_k$ .

Обозначим  $\beta = d\mu/dT|_{T=T_k}$ , тогда, учитывая два первых слагаемых разложение функции  $\mu(T)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $T = T_k$ , имеем:  $\mu = \mu_k + \beta(T - T_k) + O[(\Delta T)^2]$ . Здесь, как принято в математическом анализе, слагаемое  $O[(\Delta T)^2]$  означает остаточный член разложения, который имеет порядок  $\Delta T^2$ . Подставляя это выражение в формулу (12), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_*} &= \frac{3}{(\Delta T)^3} \int_{T_w}^{T_k} \frac{(T_k - T)^2 dT}{\mu_k + \beta(T - T_k)} = \\ &= \frac{3}{\mu_k (\Delta T)^3} \int_{T_w}^{T_k} \frac{(T_k - T)^2 dT}{1 + \frac{\beta(T - T_k)}{\mu_k}} = \\ &= \frac{3}{\mu_k (\Delta T)^3} \left[ \int_{T_w}^{T_k} (T_k - T)^2 dT + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{\mu_k} \int_{T_w}^{T_k} (T_k - T)^3 dT \right] = \\ &= \frac{3}{\mu_k (\Delta T)^3} \left[ \frac{(\Delta T)^3}{3} + \frac{\beta (\Delta T)^4}{4\mu_k} \right] = \\ &= \frac{1}{\mu_k} + \frac{3\beta \Delta T}{4\mu_k^2} + O[(\Delta T)^2]. \end{aligned} \quad (16)$$

При выводе соотношения (16) мы, во-первых, в первом интеграле опустили остаточный член  $O[(\Delta T)^2]$ , поскольку в результате он приводит к слагаемому более высокого порядка по  $\Delta T$ , чем сохраненные слагаемые в формуле (16). Во-вторых, использовали разложение геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1 + \beta(T - T_k)/\mu_k} = 1 - \frac{\beta(T - T_k)}{\mu_k},$$

отбросив слагаемые, приводящие к более высокому порядку по  $\Delta T$ , чем  $\Delta T^2$ . И, наконец, отметили, что расчет выполнен, в силу вышесказанного, с точностью до слагаемых порядка  $\Delta T^2$ .

Из зависимости (16), с той же точностью по  $\Delta T$ , находим

$$\begin{aligned} \mu_* &= \frac{\mu_k}{1 + \frac{3\beta \Delta T}{4\mu_k}} + O[(\Delta T)^2] = \mu_k \left( 1 - \frac{3\beta \Delta T}{4\mu_k} \right) + \\ &+ O[(\Delta T)^2] = \mu_k - \frac{3\beta \Delta T}{4} + O[(\Delta T)^2], \end{aligned}$$

где снова воспользовались разложением геометрической прогрессии.

Легко проверить, что такое же двучленное разложение по  $\Delta T$  будет иметь и функция:

$$\mu_* = \mu \left( \frac{3t_w + t_k}{4} \right), \quad (17)$$

которую мы далее подвергнем проверке на точность. Действительно, имеем разложение

$$\mu_* = \mu \left( \frac{3t_w + t_k}{4} \right) = \mu \left( \frac{t_k + 3t_k - 3\Delta T}{4} \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \mu \left( t_k - \frac{3\Delta T}{4} \right) = \mu_k - \frac{3}{4} \Delta T \left. \frac{d\mu}{dt} \right|_{t=t_k} + O[(\Delta T)^2] = \\ &= \mu_k - \frac{3\beta}{4} \Delta T + O[(\Delta T)^2], \end{aligned}$$

которое подтверждает вышесказанное.

Формула (17) похожа на (2), но здесь вклад  $t_w$  и  $t_k$  не одинаков. Температура в формуле (17) берется внутри интервала  $(t_w, t_k)$ , ближе к точке  $t_w$ .

В технологических расчетах в тех случаях, когда некий параметр меняется в зависимости от температуры в определенном интервале (у нас  $t \in (t_w, t_k)$ ) и требуется определить его значение из соответствующей формулы или таблицы, традиционно для этой цели выбирают среднеарифметическое значение  $(t_* = (t_w + t_k)/2)$ , как в формуле (2). Здесь показано, путем более детального анализа рассматриваемой проблемы, что целесообразнее выбирать средневзвешенную точку  $t_* = \gamma t_w + (1-\gamma)t_k$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$  в интервале  $(t_w, t_k)$  по-другому (как в формуле (16), где  $\gamma = 3/4$ ).

*Сопоставление полученных формул с известными*

Естественным образом возникает задача сравнения точной формулы (12) с приближенными (2), (4) и (17).

Чтобы конкретизировать расчеты для зависимости коэффициента вязкости от температуры, была использована формула [15]:

$$\mu(T) = \mu_0 \exp\left(\frac{T_t}{T}\right), \quad (18)$$

которая хорошо аппроксимирует экспериментальные данные для ряда жидкостей при необходимом выборе  $T_t$  и  $\mu_0$ , где  $T_t$  – характерная температура;  $\mu_0$  – значение коэффициента динамической вязкости при бесконечной температуре. В таком случае для формулы (4) легко получается выражение:

$$\mu_* = \mu_0 \exp\left(\frac{T_t}{T_*}\right), \quad T_* = \frac{2T_w T_k}{T_w + T_k}. \quad (19)$$

К сожалению, при зависимости (18) для коэффициента вязкости интеграл (12) не выражается через элементарные функции (его можно выразить через интегральную показательную функцию [16, 17]). Согласно [15], формула (18) применима для приведенных там жидкостей в диапазоне температур 10-120 °С. Аппроксимирующая формула (18) построена на основе зависимости, предложенной Я.И. Френкелем [18, 19]. В качестве исследуемой жидкости выбрана вода. Для воды [15]:  $\mu_0 = 1,05 \cdot 10^{-6}$  Па·с,  $T_t = 2024$  °К в формуле (18). На рис. 2 приведены для сравнения графики функций  $\mu_*(t_w)$  при  $T_k = \text{const} = 373$  °К представленных формулами (2), (17), (19), (12) и  $\mu_* = \mu_k$ .

Мы взяли большой интервал (30-100 °С) для изменения температуры  $t_w$  для того, чтобы

проиллюстрировать хорошее совпадение формулы (16) (кр. 2 на рис. 2) и точного решения (12) (кр. 1 на рис. 2) в широком диапазоне температур. Для воды в реальных теплообменниках диапазон  $\Delta T = 70\text{ }^\circ\text{C}$  вряд ли реализуется на практике, хотя, согласно литературным данным для некоторых энергетических установок интерес представляют интервалы  $\Delta T$  до  $50\text{ }^\circ\text{C}$ .

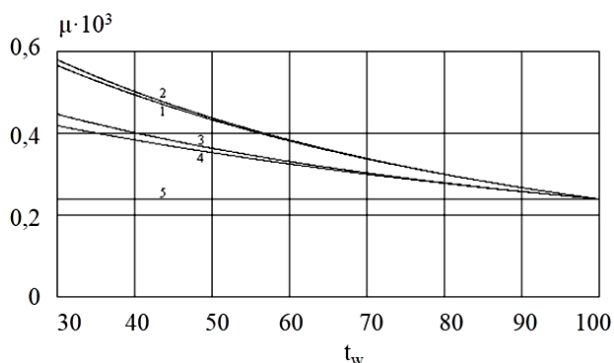


Рис. 2. Зависимость эффективного коэффициента вязкости от температуры стенки  $t_w$ : 1 – формула (12) – точное решение; 2 – формула (16); 3 – формула (18); 4 – формула (2); 5 –  $\mu^* = \mu_k$  – решение Нуссельта  
 Fig. 2. Dependence of effective viscosity coefficient on the wall temperature  $t_w$ : 1 – formula (12) – exact solution; 2 – formula (16); 3 – formula (18); 4 – formula (2); 5 –  $\mu^* = \mu_k$  – Nusselt's solution

Заметим, что при любых (естественно положительных) значениях  $T_w$ ;  $T_k$  имеет место неравенство (между средним арифметическим и средним гармоническим двух величин):

$$\frac{T_w + T_k}{2} \geq \frac{2T_w T_k}{T_w + T_k}$$

Равенство возможно только при  $T_w = T_k$ . Это неравенство, при учете монотонного убывания функции  $\mu(T)$  в соотношении (18) приводит к тому, что значение коэффициента эффективной вязкости, вычисленной по формуле (19), всегда превышает значение данного коэффициента, найденного по зависимости (2), что и подтверждается графиками на рис. 2.

Из сравнения видно, что выбор  $\mu^*$  согласно зависимости (19), всегда предпочтительнее формулы (2). Отметим также хорошую аппроксимацию формулой (17), которую можно, по крайней мере для воды, предложить для практического использования.

Близость кр. 3 и 4 на рис. 2 (см. также таблицу) показывает, что, хотя формула (4) точнее, чем (2), но это преимущество незначительно (для воды и подобных ей жидкостей), и поэтому использование зависимости (2) вместо (4), рекомен-

дованное в частности в работе [2], вполне допустимо, поскольку она функционально проще. Однако важно отметить, что приближенная формула (17) еще точнее, и следует при выборе приближенных соотношений отдать предпочтение ей. Но все же необходимо заметить, что любую приближенную формулу следует контролировать по точной формуле (12). Она учитывает изменение  $\mu$  на всем интервале  $(t_w, t_k)$ , тогда как приближенные формулы (2), (4), (17) связаны с зависимостью  $\mu(t)$  только в отдельных точках.

Следует, однако, заметить, что вывод о высокоточной аппроксимации формулой (17) точного решения (12) относится к встречающимся (проверенным) на практике жидкостям с достаточно «плавной» зависимостью коэффициента вязкости от температуры. Математически и физически допустима такая зависимость  $\mu(t)$  когда расхождение формул (12) и (17) будет значительным (более 100%). В таком случае формулы (2) и (4) выглядят менее обоснованными по сравнению с точным решением. Случайно какая-нибудь из них может оказаться точнее формулы (17). Это замечание сделано главным образом в связи с появлением новых материалов (жидкостей) со сложными свойствами и не обязательно совпадающими (качественно и количественно) в плане функциональных зависимостей  $\mu(t)$  с простыми (исследованными) жидкостями. Подобными сложными зависимостями  $\mu(t)$  могут обладать и различные смеси (как гомогенные, так и гетерогенные) несущей жидкости с пузырьками, каплями и твердыми частицами, характеризующиеся как ньютоновская жидкость с некоторым коэффициентом вязкости.

Заметим, что если сопоставлять данные не для коэффициента вязкости, а для коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , то расхождение приближенных зависимостей с точным решением будет не столь впечатляющим (кривые расположены ближе друг к другу). Однако, кроме отмеченной выше целесообразности исследования (иллюстрирования) изменения с температурой только для коэффициента  $\mu$ , важным дополнительным обстоятельством для выбора  $\mu$  в качестве главной переменной является проверка точности приближенной формулы (17), для которой координаты  $\mu$ ,  $t_k$  «менее благоприятны в плане расхождения кривых» (погрешность лучше проиллюстрирована).

В таблице приведены данные о погрешности приближенных зависимостей (2), (17), (19) и  $\mu^* = \mu_k$ , рассчитанных при  $t_w = 30\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $50\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $70\text{ }^\circ\text{C}$ . Последний случай  $\mu^* = \mu_k$  использован Нуссельтом.

Аналогичные расчеты были выполнены в случае, когда происходит конденсация бензола. Результаты близки (в плане погрешностей приближенных зависимостей) к данным, полученным для воды, и поэтому они здесь не приводятся.

**Таблица**  
**Расчетные значения погрешностей приближенных зависимостей для различных температур**  
**Table. Calculated values of errors of approximate dependences for different temperatures**

Приближенная зависимость (№ уравнения)	Относительная погрешность (%) для температуры		
	30 °С	50 °С	70 °С
$\mu_* = \mu \left( \frac{t_w + t_k}{2} \right), (2)$	26	18,7	11
$\mu_* = \mu_0 \exp \left( \frac{T}{T_*} \right), (19)$	21	16,2	10,1
$\mu_* = \mu \left( \frac{3t_w + t_k}{4} \right), (17)$	2,7	1,1	0,3
Теория Нуссельта $\mu_* = \mu_k = \text{const}$	57,8	44,8	22,2

Тот факт, что интеграл в выражении (12) при использовании аппроксимационной формулы (18) не выражается через элементарные функции, доставляет определенные неудобства в инженерной практике. В то же время современные прикладные программы (в частности Excel) позволяют легко подобрать аппроксимационные формулы различного вида, удобные в тех или иных ситуациях. Вместо формулы (18), содержащей два аппроксимационных параметра  $T_0$  и  $\mu_0$ , в нашей задаче удобно использовать следующую приближенную зависимость:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_k} + A(t_k - t)^2 + B(t_k - t), \quad (20)$$

также содержащую два аппроксимационных параметра  $A$  и  $B$ . Это позволяет обеспечить точность аппроксимации  $\mu(T)$  того же уровня, что и соотношение (18). Для наиболее часто используемого на практике теплоносителя – воды в диапазоне температур  $t \in (10 \text{ °С} - 100 \text{ °С})$  получаем для  $B = -58,44 \text{ (Па} \cdot \text{с} \cdot \text{K)}^{-1}$  и  $A = 0,229 \text{ (Па} \cdot \text{с} \cdot \text{K}^2)^{-1}$ ;  $\mu_k = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$ .

Подставляя зависимость (20) в интеграл формулы (12), получим для  $\mu_*$  соотношение, похожее на (20):

$$\frac{1}{\mu_*} = \frac{1}{\mu_k} + \frac{3A}{5} (\Delta t)^2 + \frac{3B}{4} \Delta t$$

или

$$\mu_* = \frac{\mu_k}{1 + \frac{3A\mu_k(\Delta t)^2}{5} + \frac{3B\mu_k\Delta t}{4}}. \quad (21)$$

Расчеты, использующие формулы (20), (21) вместо (18) приводят к результатам, очень близким к представленным выше на рис. 2, поэтому здесь не приводятся.

*Замечание.* Хотелось отметить, что методика вывода уравнений для стадии отжима осадка в центрифуге аналогична рассматриваемой здесь, т.е. полученные результаты могут быть полезными для анализа удаления влаги при центрифугировании. Обращаем внимание, что стадия отжима осадка мало описана в литературе. В частности, ее описание отсутствует в стандартных учебниках по ПАХТ, и только в специальной литературе по центрифугированию (напр. [20]) этому процессу уделяется определенное место. Отметим, что описание стадии отжима как одна из стадий центрифугирования приведено, например, в работах [11, 12, 20].

### ВЫВОДЫ

Проведено обобщение теории Нуссельта на случай зависимости коэффициента вязкости от температуры.

Необходимо учитывать зависимость коэффициента вязкости от температуры для более точного расчета характеристик теплообмена при пленочной конденсации.

Из приближенных зависимостей для коэффициента вязкости можно порекомендовать формулу (17), как наиболее точную при описании конденсации водяного пара и паров других жидкостей с аналогичной зависимостью  $\mu(t)$ .

### Условные обозначения

- $g$  – ускорение силы тяжести,  $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ ;
- $h$  – толщина пленки жидкости, стекающей по поверхности,  $\text{м}$ ;
- $k$  – нижний индекс, обозначает параметр при конденсации;
- $L$  – длина участка пленки,  $\text{м}$ ;
- $Q$  – объемный расход жидкости,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;
- $q$  – поток тепла,  $\text{Вт}$ ;
- $r$  – удельная теплота конденсации,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;
- $T$  – абсолютная температура,  $^\circ\text{K}$ ;
- $t$  – температура,  $^\circ\text{C}$ ;
- $u$  – скорость жидкости в пленке,  $\text{м}/\text{с}$ ;
- $w$  – нижний индекс, обозначает параметр на стенке;
- $x$  – линейная координата продольная течению жидкости;
- $y$  – линейная координата нормальная к течению жидкости (к твердой поверхности, по которой происходит течение жидкости);
- $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{K})$ ;
- $\mu$  – динамический коэффициент вязкости,  $\text{Па} \cdot \text{с}$ ;
- $\mu_*$  – эффективный коэффициент вязкости,  $\text{Па} \cdot \text{с}$ ;
- $\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .



## ЛИТЕРАТУРА

1. **Касаткин А.Г.** Основные процессы и аппараты химической технологии. М.: ООО ТИД «Альяна». 2004. 753 с.
2. **Фролов В.Ф.** Лекции по курсу процессы и аппараты химической технологии. СПб.: Химиздат. 2003. 608 с.
3. **Логинов В.С., Озерова И.П.** Оценка нестационарной теплоотдачи при пленочной конденсации пара на вертикальной стенке. *Изв. Томск. политехн. ун-та.* 2003. Т. 306. № 6. С. 67-69.
4. **Ганин П.Г., Маркова А.В., Мошинский А.И., Рубцова Л.Н., Сорокин В.В.** Об одном подходе к расчету параметров теплопередачи через стенку при наличии конденсирующегося пара. *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2018. Т. 61. Вып. 8. С. 81–87. DOI: 10.6060/ivkkt.20186108.5672.
5. **Захаров М.К.** Гидродинамика, тепло- и массообмен в движущихся плёнках при попутном или встречном газовом потоке. *Вестн. МИТХТ им. М.В. Ломоносова.* 2010. Т. 5. №1. С. 13-16.
6. **Суслов В.А.** Теплообмен. СПб.: ГОУ ВПО СПбГТУРП. 2008. 120 с.
7. **Брюханов О.Н., Шевченко С.Н.** Теплообмен. М.: Инфра-М. 2012. 464 с.
8. **Лабунцов Д.А.** О влиянии на теплоотдачу при пленочной конденсации пара зависимости физических параметров конденсата от температуры. *Теплоэнергетика.* 1957. № 2. С. 49-51.
9. **Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А.** Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. М.: ООО «РусМедиаКонсалт». 2016. 610 с.
10. **Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М.** Методы расчета процессов и аппаратов химической технологии. СПб.: ХИМ-ИЗДАТ. 2009. 544 с.
11. **Мошинский А.И.** Теория размерности в проблемах химической технологии. Lambert Academic Publishing RU. 2017. 94 с.
12. Введение в математическое моделирование химико-технологических и биотехнологических процессов. Под ред. А.И. Мошинского. СПб.: Изд-во СПХФА. 2018. 176 с.
13. **Bellman R.** Perturbation Techniques in Mathematics, Engineering and Physics. Dover Publications. 2003. 128 p.
14. **Пикунин В.П., Похожаев С.И.** Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО. 2004. 208 с.
15. **Иванов Е.В., Мазур Л.С., Маркова А.В., Рубцова Л.Н.** Основы прикладной гидравлики и теплопередачи. СПб.: Из-во СПХФА. 2010. 68 с.
16. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции и их приложения. СПб.: Издательство: "Лань". 2010. 368 с.
17. **Прудников А.П., Брычков Ю. А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003. 688 с.
18. **Френкель Я.И.** Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука. 1975. 592 с.
19. **Евдокимов И.Н., Елисеев Н.Ю.** Молекулярные механизмы вязкости жидкости и газа. Часть 1. Основные понятия. М.: РГУ нефти и газа им. Г.У. Губкина. 2005. 59 с.
20. **Шкоропад Д.Е., Новиков О.П.** Центрифуги и сепараторы для химических производств. М.: Химия. 1987. 256 с.

## REFERENCES

1. **Kasatkin A.G.** Basic processes and apparatuses of chemical technology. M.: OOO TID "Alyand". 2004. 753 p. (in Russian).
2. **Frolov V.F.** Lectures on the course processes and apparatuses of chemical technology. SPb.: Khimizdat. 2003. 608 p. (in Russian).
3. **Loginov V.S., Ozerova I.P.** Assessment of non-stationary heat transfer in film condensation of steam on a vertical wall. *Izv. Tomsk. Politekhn. Un-ta.* 2003. V. 306. N 6. P. 67-69 (in Russian).
4. **Ganin P.G., Markova A.V., Moshinskiy A.I., Rubtsova L.N., Sorokin V.V.** Calculation of parameters of heat transfer through the wall in the presence of condensing vapor. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2018. V. 61. N 8. P. 81-87 (in Russian). DOI: 10.6060/ivkkt.20186108.5672.
5. **Zakharov M.K.** Hydrodynamics, heat and mass transfer in moving films withpassing or oncoming gas flow. *Vestn. MITHT im. M.V. Lomonosova.* 2010. V. 5. N 1. P. 13-16 (in Russian).
6. **Suslov V.A.** Heat and mass transfer. SPb.: GOU VPO SPbGTURP. 2008. 120 p. (in Russian).
7. **Bryukhanov O.N., Shevchenko S.N.** Heat and mass transfer. M.: Infra-M. 2012. 464 p. (in Russian).
8. **Labuntsov D.A.** On the effect of dependence of physical parameters of condensate on temperature on the heat transfer in film condensation of steam. *Teploenergetika.* 1957. N 2. P. 49-51 (in Russian).
9. **Pavlov K.F., Romankov P.G., Noskov A.A.** Examples and tasks on the course of processes and apparatuses of chemical technology. M.: OOO «RusMediaKonsalt». 2016. 610 p. (in Russian).
10. **Romankov P.G., Frolov V.F., Flisyuk O.M.** Methods for calculating processes and apparatuses in chemical technology. SPb.: Khimizdat. 2009. 544 p. (in Russian).
11. **Moshinskiy A.I.** Dimension theory in problems of chemical technology. Lambert Academic Publishing RU. 2017. 94 p. (in Russian).
12. Introduction to mathematical modeling of chemical-technological and biotechnological processes. Ed. by A.I. Moshinskiy. SPb.: Izd-vo SPHFA. 2018. 176 p. (in Russian).
13. **Bellman R.** Perturbation Techniques in Mathematics, Engineering and Physics. Dover Publications. 2003. 128 p.
14. **Pikulin V.P., Pohozhaev S.I.** Practical course on equations in mathematical physics. M.: MCNMO. 2004. 208 p. (in Russian).
15. **Ivanov E.V., Mazur L.S., Markova A.V., Rubtsova L.N.** Fundamentals of applied hydraulics and heat transfer. SPb.: Iz-vo SPHFA. 2010. 68 p. (in Russian).
16. **Lebedev N.N.** Special functions and their applications. SPb.: Izdatel'stvo: "Lan". 2010. 368 p. (in Russian).
17. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., Marichev O.I.** Integrals and Series. M.: FIZMATLIT. 2003. 688 p. (in Russian).
18. **Frenkel' Ya.I.** Kinetic theory of liquids. L.: Nauka. 1975. 592 p. (in Russian).
19. **Evdokimov I.N., Eliseev N.Yu.** Molecular mechanisms of fluid and gas viscosity. Part 1. Basic concepts. M.: RGU Nefti i Gaza im. G.U. Gubkina. 2005. 59 p. (in Russian).
20. **Shkoropad D.E., Novikov O.P.** Centrifuges and separators for the chemical industry. M.: Khimiya. 1987. 256 p. (in Russian).

Поступила в редакцию (Received ) 03.12.2019

Принята к опубликованию (Accepted ) 13.03.2020