

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ КАНАЛАХ ПРЯМОУГОЛЬНОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Л.Н. Рубцова, Л.Ю. Александрова, П.Г. Ганин, А.В. Маркова, А.И. Мошинский, В.В. Сорокин

Лариса Николаевна Рубцова \*, Любовь Юрьевна Александрова, Павел Георгиевич Ганин, Алла Валентиновна Маркова, Александр Иванович Мошинский, Владислав Валерьевич Сорокин  
Кафедра процессов и аппаратов химической технологии, Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет, ул. Проф. Попова, 14, Санкт-Петербург, Российская Федерация, 197376  
E-mail: larisapns@mail.ru \*

*Основное внимание в данной работе обращено на недостатки использования в химической технологии, в энергетике и других приложениях такого понятия, как эквивалентный диаметр, вводимого для каналов сложной формы (не кругового поперечного сечения) при описании в них потоков жидкости и газа. Для подробно разобранных примеров, в иллюстративных целях, использовались призматические каналы в форме поперечного сечения эллипса, прямоугольника и равностороннего треугольника. Такая характеристика канала, как эквивалентный диаметр, используется также в учебных дисциплинах, связанных с потоком сплошной фазы в химической технологии. Для данных сечений известны точные решения задачи гидродинамики при ламинарном установившемся течении ньютоновских жидкостей и слабосжимаемых газов. Хорошим примером является также вариант течения жидкости в канале с поперечным сечением формы равностороннего треугольника, также имеющим точное решение задачи гидродинамики. В случае канала формы сечения прямоугольника показана эффективность использования вариационных и родственных им методов (Ритца и Канторовича) для анализа задач течения в призматическом канале при малых значениях числа Рейнольдса. Получены аналитические соотношения, которые проиллюстрированы на графиках для зависимости объемного расхода жидкости через поперечное сечение рассмотренных каналов от основных параметров процесса. Приведены иллюстрирующие проблему, то есть оценивающие диапазон пригодности описания течения ньютоновских жидкостей в рассмотренных призматических каналах при использовании понятия «эквивалентный диаметр», дополнительные формульные соотношения, графические данные. Полученные результаты сравнивались с известными по литературным источникам.*

**Ключевые слова:** эллиптический канал, прямоугольный канал, эквивалентный диаметр, метод Ритца, метод Канторовича, ламинарное течение

## STUDY OF LAMINAR FLOW IN PRISMATIC CHANNELS OF RECTANGULAR AND ELLIPTICAL SECTION

L.N. Rubtsova, L.Yu. Alexandrova, P.G. Ganin, A.V. Markova, A.I. Moshinsky, V.V. Sorokin

Larisa N. Rubtsova, Lyubov Yu. Aleksandrova, Pavel G. Ganin, Alla V. Markova, Aleksandr I. Moshinsky, Vladislav V. Sorokin  
Saint Petersburg State Chemical Pharmaceutical University, Prof. Popova st.,14, St. Petersburg, 197376, Russia  
E-mail: larisapns@mail.ru \*

*The main attention in this work is paid to the disadvantages of using in chemical technology, in power engineering and other applications such a concept as the equivalent diameter introduced for channels of complex shape (not circular cross-section) when describing liquid and gas flows in them. For the detailed examples, for illustrative purposes, prismatic channels in the form of a cross-section of an ellipse, a rectangle, and an equilateral triangle have been used. Such a*

*channel characteristic as an equivalent diameter is also used in educational disciplines related to the flow of a continuous phase in chemical technology. For these cross sections, exact solutions of the hydrodynamic problem are known for a laminar steady flow of Newtonian fluids and weakly compressible gases. A good example is also a variant of fluid flow in a channel with an equilateral triangle-shaped cross section, which also has an exact solution to the hydrodynamics problem. In the case of a channel with a rectangular cross-section, the efficiency of using variational and related methods (Ritz and Kantorovich) for the analysis of flow problems in a prismatic channel at small values of the Reynolds number is shown. Analytical relationships are obtained, which are illustrated in the graphs for the dependence of the volumetric flow rate of liquid through the cross section of the considered channels on the main parameters of the process. Illustrating the problem, that is, evaluating the range of suitability of describing the flow of Newtonian fluids in the considered prismatic channels when using the concept of "equivalent diameter", in addition to the formula relations, graphical data are given. The results obtained were compared with those known from the literature.*

**Key words:** elliptical channel, rectangular channel, equivalent diameter, Ritz's method, Kantorovich's method, laminar flow

**Для цитирования:**

Рубцова Л.Н., Александрова Л.Ю., Ганин П.Г., Маркова А.В., Мошинский А.И., Сорокин В.В. Исследование ламинарного течения в призматических каналах прямоугольного и эллиптического сечения. *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2022. Т. 65. Вып. 4. С. 93–100

**For citation:**

Rubtsova L.N., Alexandrova L.Yu., Ganin P.G., Markova A.V., Moshinsky A.I., Sorokin V.V. Study of laminar flow in prismatic channels of rectangular and elliptical section. *ChemChemTech [Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.]*. 2022. V. 65. N 4. P. 93–100

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время определены профили скоростей при ламинарном установившемся движении ньютоновской жидкости в каналах с самыми различными формами поперечного сечения. Ряд вариантов представлен в таблицах работ [1, 2]. Этот список может быть расширен применением конформного преобразования рассматриваемого сечения призматической трубы на область в виде круга [3]. Возможны и другие методы анализа рассматриваемой задачи [3, 4]. Течение сплошной среды в каналах и элементах технических устройств представляет практический интерес для ряда приложений [1, 2, 5-14].

В начале XX века в период отсутствия ЭВМ и слабого их распространения в научной и инженерной практике широкое использование получили вариационные и проекционные методы решения задач математической физики и техники. Эти методы позволяли путем стандартных выкладок (как правило, наиболее сложным элементом расчета было вычисление определенных интегралов от элементарных функций, которые (интегралы) находились аналитически) получить приближенное решение достаточно сложных задач, в большинстве случаев не имеющих аналитического решения, с достаточной для практики точностью.

Особенно активно вариационные и проекционные методы использовались при расчете упругих конструкций (в частности, в кораблестроении) и квантовой механике (при расчете энергий состояний, спектров атомов и т. д.).

В химической технологии и энергетике приближенные методы данного класса не получили должного распространения, хотя они чуть ли не идеально подходят для соответствующих задач. Дело в том, что в химической технологии и технике часто возникают проблемы решения достаточно сложных уравнений процессов, основанных на приближенных моделях, причем, как правило, достаточно грубых и с проблематичной оценкой диапазона их пригодности. В таком случае традиционное использование трудоемких численных методов часто не оправдано, поскольку полученные достаточно точно численные результаты в силу приближенности моделей ничем не лучше результатов, найденных простыми способами из тех же моделей с приемлемой для практики точностью.

## ПОСТАНОВКА И АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

В данной работе мы сравним несколько полученных разными авторами (методами) и нами решений задачи течения жидкостей (газов) в призма-

тической трубе с поперечным сечением в виде эллипса и прямоугольника при малых значениях числа Рейнольдса с точным решением, тем самым продемонстрируем эффективность вариационного подхода. Обсудим также вариант, когда используется эффективный диаметр канала не круговой формы. Что не редко применяется в приложениях.

*Эллиптический канал.* Сопоставим точное решение для расхода жидкости в призматическом канале с эллиптическим поперечным сечением и приближенное решение при введении эквивалентного диаметра, заменив эллипс окружностью. В каноническом варианте уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса. Для конкретности будем полагать, что  $a \geq b$ . Форму эллипса характеризует безразмерный параметр (эксцентриситет), определяемый зависимостью

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (2)$$

Известно [15], что площадь эллипса (поперечного сечения канала) равна

$$S = \pi ab, \quad (3)$$

а его периметр определяется выражением

$$P = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = 4aE(\varepsilon), \quad (4)$$

где  $E(\varepsilon)$  – полный эллиптический интеграл второго рода. В программной среде MathCad имеется встроенная гипергеометрическая функция  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ , через которую можно выразить [16] функцию  $E(\varepsilon)$ :

$$E(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \varepsilon^2\right). \quad (5)$$

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется рядом [16]

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} z^k, \quad (6)$$

где  $z$  – комплексное перемещенное,  $\alpha, \beta, \gamma$  – параметры, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения ( $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ ), а символ  $(\lambda)_k$  обозначает величину

$$(\lambda)_k = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k-1), \quad (\lambda)_0 = 1. \quad (7)$$

В частных случаях, когда параметры  $\alpha$  или  $\beta$  равны нулю или целому отрицательному числу, то множители  $(\alpha)_k$  или  $(\beta)_k$  в формуле (6) будут равны нулю, что вытекает из зависимости (7), куда следует подставлять  $\alpha$  или  $\beta$ . В таком варианте в ряде (6) останется конечное число слагаемых и он становится полиномом относительно  $z$ . За исклю-

чением этого случая, радиус сходимости гипергеометрического ряда равняется единице [16].

На практике часто используется понятие эквивалентного диаметра для сечений каналов, отличающихся от кругового [1]:

$$d_3 = \frac{4S}{P}, \quad (8)$$

где  $S$  – площадь, ограниченная контуром области,  $P$  – смоченный периметр этой области. В работе [19] отмечается проблематичность (грубость) использования в приложениях другой характеристики каналов сложной формы — гидравлического радиуса:

$$r_0 = S/P. \quad (9)$$

Этот параметр применялся в [19] для характеристики напряжения трения на стенках канала. В ряде технических приложений более популярен эквивалентный диаметр, а интерес представляет, в первую очередь, расход жидкости в каналах. Поэтому далее будем оперировать эквивалентным диаметром.

Например, достаточно легко заметить неточность использования понятия «эквивалентный диаметр» на примере расчета расхода  $Q_t$  жидкости в канале формы равностороннего треугольника, для которого известна точная формула [19]. Сопоставление этой формулы с зависимостью, опирающейся на течения в трубе кругового сечения с эквивалентным диаметром  $Q_{np}$ , приводит к выражению:

$$\frac{Q_{np}}{Q_t} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{54} \approx 0,5038 \quad (10)$$

т.е. отличие примерно в два раза. Сравнение расходов через рассмотренные каналы, когда площади сечений каналов одинаковы, приведено в работе [3]. Отношение расходов равно 0,72552. Уменьшение расхода в трубе треугольной формы по сравнению с круговой обусловлено острыми углами треугольного сечения.

Таким образом, эквивалентный диаметр эллипса можно выразить соотношением

$$d_3 = \frac{4S}{P} = \frac{\pi b}{E(\varepsilon)} = \frac{2b}{F(-1/2, 1/2, 1, \varepsilon^2)}. \quad (11)$$

Известно [1, 17, 19], что профиль скорости ньютоновской жидкости  $w$  в призматическом канале при ламинарном установившемся течении (малые числа Рейнольдса) удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -R, \quad R = \frac{\Delta p}{\mu L} \quad (12)$$

где  $\Delta p/L$  – перепад давления на единицу длины,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости. Функция  $w$  (скорость жидкости вдоль оси канала) удовлетворяет граничному условию прилипания на контуре области, в рассматриваемом случае границы эллипса.

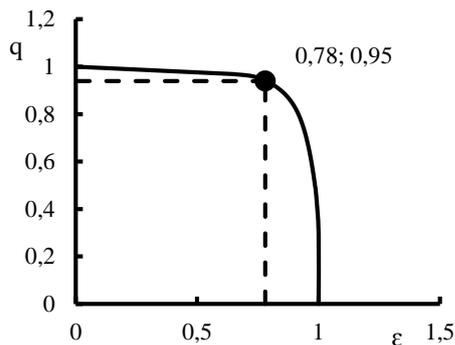


Рис. 1. График функции  $q(\varepsilon)$ , определяемый соотношением (16)

Fig. 1. The graph of the function  $q(\varepsilon)$ , determined by the relation (16)

Точное значение расхода ньютоновской жидкости через канал с поперечным сечением в виде эллипса имеет форму [19]

$$Q_{\tau} = \frac{\pi a^3 b^3 \Delta p}{4\mu L (a^2 + b^2)} = U \frac{\pi ab}{2}; \quad U = \frac{a^2 b^2 \Delta p}{2\mu L (a^2 + b^2)}, \quad (13)$$

где  $U$  – максимальная скорость в канале формы эллипса, а профиль скорости определяется выражением

$$w = U \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (14)$$

тогда как расход жидкости в канале при круговом сечении с эквивалентным диаметром  $d_s$ , таков:

$$Q_{\text{кр}} = \frac{\pi \Delta p}{8\mu L} \left[ \frac{\pi b}{2E(\varepsilon)} \right]^4. \quad (15)$$

Сопоставление результатов удобно представить при помощи формулы

$$q(\varepsilon) = \frac{Q_{\text{кр}}}{Q_{\tau}} = \frac{\pi b (a^2 + b^2)}{2^5 a^3 E(\varepsilon)^4} = \frac{(2 - \varepsilon^2) \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2F(-1/2, 1/2, 1, \varepsilon^2)^4}. \quad (16)$$

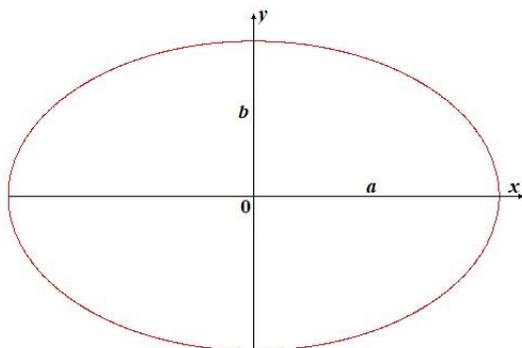


Рис. 2. Эллипс при  $\varepsilon = 0,78$   
Fig. 2. Ellipse at  $\varepsilon = 0.78$

На рис. 1 представлен график функции  $q(\varepsilon)$ . Если потребовать не более 5% отклонения приближенного расхода  $Q_{\text{пр}}$  от точного  $Q_{\tau}$ , то должно

быть  $\varepsilon \leq 0,78$  (рис. 1). При крайнем значении  $\varepsilon = 0,78$  имеем  $b/a = 0,626$ . Соответствующий этому отношению эллипс представлен на рис. 2, из которого можно судить об его отклонении от окружности, когда течение в каналах эллиптической формы описывается при помощи понятия эквивалентного диаметра. Из графика рис. 1 видно, как снижается качество описания процесса при использовании понятия эквивалентного диаметра, когда  $\varepsilon > 0,8$ .

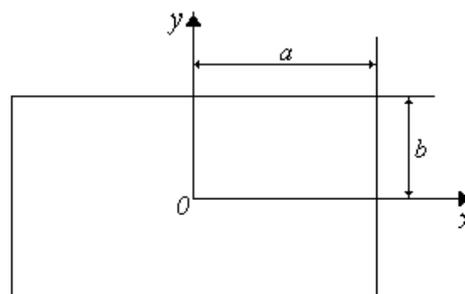


Рис. 3. Область течения в прямоугольном канале  
Fig. 3. Flow area in a rectangular channel

*Прямоугольный канал.* Область течения представлена на рис. 3.

Функция  $w$  (скорость жидкости вдоль оси канала) удовлетворяет граничному условию прилипания на контуре области. Теперь это условие записывается так:

$$w|_{x=\pm a} = w|_{y=\pm b} = 0. \quad (17)$$

Точное решение задачи (12), (17) известно [1, 2, 19, 20] и представляет собой сумму ряда, но не удобно для практического использования. Заметим, что в работе [20] решается задача кручения стержня, которая математически эквивалентна задаче течения ньютоновской жидкости в канале. Расход жидкости через сечение канала определяется выражением:

$$Q_* = \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b w(x, y) dy, \quad Q = \frac{Q_*}{Rab^3}, \quad (18)$$

где  $Q$  – безразмерный расход.

В работе [19] приведены табличные данные, представляющие решение для расхода жидкости в виде:

$$Q = \frac{\Delta p}{4\mu L} \kappa b^4 f(\kappa), \quad \kappa = \frac{a}{b}. \quad (19)$$

Точнее, приведена таблица для функции  $f(\kappa)$  при  $\kappa = a/b \geq 1$ . Для  $\kappa < 1$ , когда  $a < b$ , поменяв в точном решении параметры  $a$  и  $b$ , можно получить функциональное уравнение для функции  $f(\kappa)$ :

$$f\left(\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{f(\kappa)}{\kappa^2}. \quad (20)$$

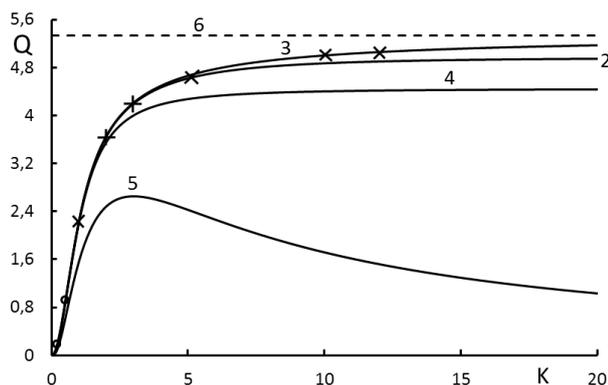


Рис. 4. Графики функций  $Q$ . Номера кривых соответствуют индексам приведенных формул  $Q_k$ , 6 – асимптотическое значение точного решения  $16/3$

Fig. 4. Graphs of functions  $Q$ . The numbers of the curves correspond to the indices of the reduced formulas  $Q_k$ , 6 – the asymptotic value of the exact solution  $16/3$

Для точного решения на рис. 4 приведены отдельные точки  $\times$  при  $\kappa \geq 1$  и  $\circ$  при  $\kappa < 1$ , полученные на основе таблицы и формулы (20). Отметим, что нормировка расхода в (18) фактически приводит к сравнению различных вариантов дальнейших расчетов с функцией  $f(\kappa)$  из таблицы.

#### Таблица

##### Значение функций $f(\kappa)$ в отдельных точках [19]

Table. The value of the function  $f(\kappa)$  at individual points [19]

$\kappa$	1	2	3	5	10	12	100	$\infty$
$f(\kappa)$	2,253	3,664	4,203	4,665	5,000	5,059	5,299	5,333

При  $\kappa \rightarrow \infty$ , как установлено в работе [19], рассмотренная задача сводится к описанию течения в бесконечной в обе стороны щели. Крайнее значение в таблице при  $\kappa = \infty$  точно равно  $16/3$ . Формулу (20) можно использовать для нахождения асимптотического поведения функции  $f(\kappa)$  при  $\kappa \rightarrow 0$ . Из отмеченной формулы следует, что

$$f(\kappa) \cong 16\kappa^2/3, \quad \kappa \rightarrow 0. \quad (21)$$

Данное соотношение описывает начальный участок графика точного решения на рис. 4. Также можно найти производную функции  $f(\kappa)$  в точке  $\kappa = 1$ . Выполнив дифференцирование обеих частей соотношения (20) и подставив в результат  $\kappa = 1$ , получим, согласно таблице:  $f'(1) = f(1) = 2,253$ .

Уравнение (12) является уравнением Эйлера [19, 20] для функционала:

$$I = \iint_S \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2Rw \right] dx dy, \quad (22)$$

решение которого доставляет функционалу (22) экстремальное значение.

Простейший вариант течения жидкости, учитывающий форму профиля в круглой трубе и в бесконечно-протяженной щели, задаем формулой:

$$w(x, y) = A \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (23)$$

Подставив соотношение (23) в функционал (22) и вычислив возникающие при этом интегралы, получим квадратичное относительно параметра  $A$  выражение. Далее находим его экстремум. Он осуществляется при:

$$A = \frac{5a^2b^2R}{2(a^2 + b^2)}. \quad (24)$$

Реализация описанной процедуры называется методом Ритца. Расход жидкости согласно (18), (23) и (24) определяется формулой:

$$Q_2 = \frac{40}{9} \left( \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + 1} \right), \quad \kappa = \frac{a}{b}. \quad (25)$$

Эту формулу представляет кривая 2 на рис. 4. Нами было проведено уточнение зависимости (25):

$$w(x, y) = \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right] \cdot \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] \cdot \left[ A_0 + A_1 \left( \frac{x}{a} \right)^2 + A_2 \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right]. \quad (26)$$

В результате, после проведения аналогичных описанным выкладкам из условий экстремума функционала (22), получены выражения для  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ :

$$A_0 = \frac{315 \cdot R \cdot a^6 \cdot b^2 + 4550 \cdot R \cdot a^4 \cdot b^4 + 315 \cdot R \cdot a^2 \cdot b^6}{720 \cdot a^6 + 8144 \cdot a^4 \cdot b^2 + 8144 \cdot a^2 \cdot b^4 + 720 \cdot b^6}$$

$$A_1 = \frac{945 \cdot R \cdot a^6 \cdot b^2 + 150 \cdot R \cdot a^4 \cdot b^4}{720 \cdot a^6 + 8144 \cdot a^4 \cdot b^2 + 8144 \cdot a^2 \cdot b^4 + 720 \cdot b^6} \quad (27)$$

$$A_2 = \frac{150 \cdot R \cdot a^4 \cdot b^4 + 945 \cdot R \cdot a^2 \cdot b^6}{720 \cdot a^6 + 8144 \cdot a^4 \cdot b^2 + 8144 \cdot a^2 \cdot b^4 + 720 \cdot b^6}$$

Значение расхода жидкости, для (24), (25) таково:

$$Q_3 = \frac{224}{9} \cdot \frac{\kappa^2 \cdot (82\kappa^2 + 9 + 9\kappa^4)}{45\kappa^6 + 509\kappa^4 + 509\kappa^2 + 45}. \quad (28)$$

График данной зависимости проведен на рис. 4 (кр. 3). Видим, что соответствие формулы (28) и точного решения (выраженного отдельными точками из таблицы) заметно лучше, чем у формулы (25) метода Ритца с одной функцией в разложении решения.

Л.В. Канторовичем был усовершенствован метод Ритца. Он предложил только частично назначать «искомую» функцию, определяя полное выражение для приближенного решения из вариационного принципа. В работе [20] решение задачи (12), (17) при помощи функционала (22) разыскивается в виде:

$$W_4(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) F(y). \quad (29)$$

В соотношении (22) можно сразу выполнить интегрирование по переменной  $x$ . При этом данный функционал станет зависим от одной переменной  $y$ , и реализация его экстремума проводится при помощи уравнения Эйлера [20, 21] вариационного исчисления:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial y'} \right), \quad (30)$$

где  $G$  – подынтегральная функция в функционале.

Решение уравнения (30) при нулевых условиях на контуре  $y = \pm b$  таково [20]:

$$F_4(y) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} \left( \frac{y}{b} \sqrt{\frac{5}{2}} \right)}{\operatorname{ch} \left( \kappa \sqrt{\frac{5}{2}} \right)} \right], \quad (31)$$

а выражение для расхода жидкости имеет вид

$$Q_4 = \frac{16}{3} \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{\kappa \sqrt{5}} \operatorname{th} \left( \kappa \sqrt{\frac{5}{2}} \right) \right]. \quad (32)$$

Л.В. Канторович решал задачу о кручении стержня, математически эквивалентную рассматриваемой здесь задаче. Эта формула (кривая 4, рис. 4) лучше всего аппроксимирует точное значение.

Если использовать  $d_s = 4ab/(a+b)$  для прямоугольного канала, то приходим к формуле для безразмерного расхода

$$Q_{d_s} = \frac{8\pi\kappa^3}{(1+\kappa)^4}. \quad (33)$$

Видим (рис 4, кр. 5), что формула (33) наихудшая из всех представленных. Она совершенно не пригодна для расчетов при  $\kappa = a/b > 0,1$ , т.е. практически всегда. По форме ближе всего к кругу симметричный случай квадрата  $a = b$ ,  $\kappa = 1$ . При этом зависимость (33) дает относительное отклонение от точного решения (таблица при  $\kappa = 1$ ) 82,6%. Более того, при больших значениях  $\kappa$  эта формула качественно ведет себя не так как точное решение. Так как точное решение и формула, предложенная Канторовичем, совпадают при принятых масштабах, то на рисунке они представлены одной кривой. Таким образом, предложенное нами решение оказалось точнее, чем решение Ритца, но хуже, чем точный вариант, и соответственно решение методом Канторовича. Формула метода Канторовича (32) оказалась наиболее точной, однако при более сложных функционалах формула для решения (типа  $F_4(y)$ ) может быть найдена только численными методами [22]. Поэтому, если не требуется особенно высокая точность расчета (как в широком

спектре задач энергетики и химической технологии), целесообразно использовать метод Ритца.

В работе [19] приведены формулы для коэффициента сопротивления (трения)  $\lambda$  в каналах поперечного сечения в виде эллипса и прямоугольника. Для эллиптического канала приводим такую же зависимость, как и в [19]:

$$\lambda = \frac{64}{\operatorname{Re}}, \quad \operatorname{Re} = \frac{W_{\text{cp}} \rho d}{\mu}, \quad d = \frac{2ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad W_{\text{cp}} = U/2, \quad (34)$$

тогда как для прямоугольного канала заменим функцию  $f(\kappa)$  в [19] на достаточно близкую к ней зависимость (32). В результате получим приближенную формулу:

$$\lambda = \frac{24}{\operatorname{Re} \left[ 1 - \frac{\sqrt{2}}{\kappa \sqrt{5}} \operatorname{th} \left( \kappa \sqrt{\frac{5}{2}} \right) \right]}, \quad \operatorname{Re} = \frac{W_{\text{cp}} \rho 2b}{\mu}, \quad (35)$$

где  $W_{\text{cp}}$  – средняя скорость, равная отношению расхода жидкости через сечение канала к площади сечения.

Отметим, что в основной формуле гидравлики:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho W_{\text{cp}}^2}{2}, \quad (36)$$

включающей коэффициент  $\lambda$ , зависимости от плотности  $\rho$  нет, а  $\Delta p$  фактически пропорционально  $W_{\text{cp}}$ , что можно было заметить из основного уравнения проблемы (12).

## ВЫВОДЫ

Показана эффективность применения вариационных методов для поиска приближенных решений рассмотренных задач гидродинамики.

Для расчета интегралов удобно использовать программную среду MathCad, позволяющую для них получить аналитические выражения.

Проведено сравнение точных решений задачи течения в призматических каналах с приближенными, использующими понятие эквивалентного диаметра. Установлены границы применимости отмеченного приближенного подхода в рассмотренных случаях ламинарного течения ньютоновской жидкости.

Полученные результаты полезны для некоторых других физических явлений, имеющих совпадающее (с точностью до обозначений) математическое описание. Например, это кручение стержней, движение идеальной жидкости во вращающихся с постоянной угловой скоростью каналов и др.

Показано, что с погрешностью менее 5% для эллиптического канала можно использовать понятия эквивалентного диаметра, когда эксцентриситет эллипса не превышает 0,78. Для прямо-

угольного в поперечном сечении канала из графиков рис. 4 вытекает весьма ограниченная область пригодности расчета, опирающегося на понятие эквивалентного диаметра.

*Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов, требующего раскрытия в данной статье.*

*The authors declare the absence a conflict of interest warranting disclosure in this article.*

#### УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A, A_1, A_2, A_3$  – постоянные параметры в формулах (24) и (27);

$a$  и  $b$  – полуоси эллипса или полустороны прямоугольника;

$d_3$  – эквивалентный диаметр сечения канала, м;

$E(\varepsilon)$  – полный эллиптический интеграл второго рода;

$F$  – гипергеометрическая функция;

$f(\kappa)$  – функция, определенная в таблице;

$I$  – функционал ( );

$P$  – смоченный периметр, м;

$Q_t$  – расход жидкости в канале формы равностороннего треугольника;

$Q_{np}$  – расход жидкости в канале формы равностороннего треугольника, рассчитанный при помощи эквивалентного диаметра;

$Q_k$  – расход для варианта  $k$ ;

$q(\varepsilon)$  – определяемый соотношением (16);

$Re$  – число Рейнольдса;

$r_0$  – гидравлический радиус;

$S$  – площадь эллипса (поперечного сечения канала),  $m^2$ ;

$t$  – переменная интегрирования в формуле (4);

$U$  – максимальная скорость в канале формы эллипса;

$W_{cp}$  – средняя скорость;

$w$  – профиль скорости в эллиптическом канале;

$z$  – комплексное перемещение;

$\alpha, \beta, \gamma$ , – параметры гипергеометрической функции;

$\Delta p/L$  – перепад давления на единицу длины;

$\varepsilon$  – безразмерный параметр (эксцентриситет);

$\kappa = a/b$  – параметр прямоугольного канала;

$\lambda$  – коэффициент сопротивления (трения);

$\mu$  – коэффициент динамической вязкости, Па·с.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.
2. Исаев С.И., Кожин И.А., Кофанов В.И. Теория теплообмена. М.: Высш. шк. 1979. 495 с.
3. Хэппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 2016. 632 с.
4. Мошинский А.И. Теория размерности в проблемах химической технологии. Lambert Academic Publ. RU. 2017. 94 с.
5. Аббасов Э.М., Имамалиев С.А. Математическое моделирование движения двухфазной жидкости в концентрично расположенных сообщающихся трубах. *Инж.-физ. журн.* 2014. Т. 87. № 6. С. 1282-1289.
6. Бабкин В.А. О движении цилиндрического контейнера в круглой трубе под действием потока жидкости. *Инж.-физ. журн.* 2013. Т. 86. № 2. С. 416-422.
7. Чесноков Ю.Г. Новые формулы для расчета характеристик течения жидкости или газа в трубе кругового поперечного сечения. *Инж.-физ. журн.* 2017. Т. 90. № 4. С. 1005-1011.
8. Борзенко Е.И., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р. Фонтанирующее неизотермическое течение вязкой жидкости при заполнении круглой трубы. *Теор. осн. хим. технол.* 2014. Т. 48. № 6. С. 677-684.
9. Nor Haziq Naquiuddina, Lip Huat Sawa, Ming Chian Yewa, Farazila Yusofb, Tan Ching Nga, Ming Kun Yewa. Overview of micro-channel design for high heat flux application. *Renew. Sust. En. Rev.* 2018. V. 82. P. 901–914.
10. Brandner J.J., Anurjew E., Bohn L., Hansjosten E, Henning T., Schygulla U., Wenka A., Schubert K. Concepts and realization of microstructure heat exchangers for enhanced heat transfer. *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2006. V. 30. P. 801–809.

#### REFERENCES

1. Petukhov B.S. Heat transfer and resistance in laminar flow in pipes. M.: Energiya. 1967. 412 p. (in Russian).
2. Isaev S.I., Kozhinov I.A., Kofanov V.I. Theory of heat and mass transfer. M.: Vyssh. shk. 1979. 495 p. (in Russian).
3. Happel J. Hydrodynamics at small Reynolds numbers. M.: Mir. 2016. 632 p. (in Russian).
4. Moshinsky A.I. Theory of dimension in the problems of chemical technology. Lambert Academic Publ. RU. 2017. 94 p. (in Russian).
5. Abbasov E.M., Imamaliyev S.A. Mathematical modeling of the movement of a two-phase fluid in concentrically located communicating pipes. *Eng. Fizich. Zhurn.* 2014. V. 87. N 6. P. 1282-1289 (in Russian).
6. Babkin V.A. On the motion of a cylindrical container in a round pipe under the action of a fluid flow. *Eng. Fizich. Zhurn.* 2013. V. 86. N 2. P. 416-422 (in Russian).
7. Chesnokov Yu.G. New formulas for calculating the characteristics of the flow of liquid or gas in a pipe with a circular cross section. *Eng. Fizich. Zhurn.* 2017. V. 90. N 4. P. 1005-1011 (in Russian).
8. Borzenko E.I., Frolov O.Yu., Shragher G.R. Gushing nonisothermal flow of a viscous liquid when filling a round pipe. *Teor. Osnovy Khim. Tekhnol.* 2014. V. 48. N 6. P. 677-684 (in Russian).
9. Nor Haziq Naquiuddina, Lip Huat Sawa, Ming Chian Yewa, Farazila Yusofb, Tan Ching Nga, Ming Kun Yewa. Overview of micro-channel design for high heat flux application. *Renew. Sust. En. Rev.* 2018. V. 82. P. 901–914.
10. Brandner J.J., Anurjew E., Bohn L., Hansjosten E, Henning T., Schygulla U., Wenka A., Schubert K. Concepts and realization of microstructure heat exchangers for enhanced heat transfer. *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2006. V. 30. P. 801–809.

11. **Hamdi E. Ahmed, Mirghani I. Ahmed.** Optimum thermal design of triangular, trapezoidal and rectangular grooved microchannel heat sinks. *Int. Commun. Heat Mass Transfer*. 2015. P. 47-57.
12. **Лесев В.Н.** Моделирование режимов ламинарного течения жидкости внутри капилляра в магнитном поле. *Эколог. вестн. науч. центров черномор. эконом. сотрудн.* 2010. Т. 7. № 3. С. 25-29.
13. **Сергеев С.П., Никифоров Ф.Ф., Афанасьев С.В., Шевченко Ю.Н.** Гидродинамика, распределение потоков и тепловая эффективность змеевиковых теплообменников в блоках теплоиспользующей аппаратуры трубчатых печей. *Изв. вузов. Химия и хим. технология*. 2019. Т. 62. Вып. 4. С. 143-151. DOI: 10.6060/ivkkt.20196204.5734.
14. **Чернявская А.С., Бобков С.П.** Дискретное моделирование конвективного переноса теплоты. *Изв. вузов. Химия и хим. технология*. 2018. Т. 61. Вып. 2. С. 86-90. DOI: 10.6060/tcct.20186102.5625.
15. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. СПб.: Изд-во Лань. 2012. 800 с.
16. **Лебедев Н.Н.** Специальные функции и их приложения. СПб.: Изд-во Лань. 2010. 368 с.
17. **Фролов В.Ф.** Лекции по курсу «Процессы и аппараты химической технологии». СПб.: ХИМИЗДАТ. 2020. 608 с.
18. **Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А.** Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. М.: ООО «РусМедиаКонсалт». 2016. 610 с.
19. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Изд-во Дрофа. 2003. 840 с.
20. **Канторович Л.В., Крылов В.И.** Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз. 1962. 708 с.
21. **Смирнов В.И.** Вариационное исчисление. М.: «YOYO Медиа». 2012. 204 с.
22. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир. 1985. 590 с.
11. **Hamdi E. Ahmed, Mirghani I. Ahmed.** Optimum thermal design of triangular, trapezoidal and rectangular grooved microchannel heat sinks. *Int. Commun. Heat Mass Transfer*. 2015. P. 47-57.
12. **Lesev V.N.** Modeling of regimes of laminar flow of liquid inside a capillary in a magnetic field. *Ekolog. Vest. Nauch. Tsentrov Chernomor. Ekonom. Sotrudn.* 2010. V. 7. N 3. P. 25-29 (in Russian).
13. **Sergeev S.P., Nikiforov F.F., Afanasyev S.V., Shevchenko Yu.N.** Hydrodynamics, flow distribution and thermal efficiency of serpentine heat exchangers in blocks of heat-using equipment of tube furnaces. *ChemChemTech [Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.]*. 2019. V. 62. N 4. P. 143-151 (in Russian). DOI: 10.6060/ivkkt.20196204.5734
14. **Chernyavskaya A.S., Bobkov S.P.** Discrete modeling of convective heat transfer. *ChemChemTech [Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.]*. 2018. V. 61. N 2. P. 86-90 (in Russian). DOI: 10.6060/tcct.20186102.5625.
15. **Fikhtengolts G.M.** Differential and integral calculus course. Т. II. М.: Nauka. 1969. 800 p. (in Russian).
16. **Lebedev N.N.** Special functions and their applications. М.; L.: Fizmatgiz. 1963. 360 p. (in Russian).
17. **Frolov V.F.** Lectures on the course "Processes and devices of chemical technology". SPb.: KHMIZDAT. 2020. 608 p. (in Russian).
18. **Pavlov K.F., Romankov P.G., Noskov A.A.** Examples and tasks for the course of processes and devices of chemical technology. М.: ООО RusMedia-Consult. 2016. 610 p. (in Russian).
19. **Loytsyansky L.G.** Mechanics of liquid and gas. М.: Bustard Publishing House. 2003. 840 p. (in Russian).
20. **Kantorovich L.V., Krylov V.I.** Approximate methods of higher analysis. L.: Fizmatgiz. 1962. 708 p. (in Russian).
21. **Smirnov V.I.** Calculus of variations. М.: YoYo Media. 2012. 204 p. (in Russian).
22. **Rectoris K.** Variational methods in mathematical physics and technology. М.: Mir. 1985. 590 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 15.10.2021  
Принята к опубликованию 25.02.2022

Received 15.10.2021  
Accepted 25.02.2022