

## ИОННЫЙ ОБМЕН НА ВОЛОКНИСТОМ ИОНИТЕ В ЕМКОСТНОМ АППАРАТЕ ПРОТОЧНОГО ТИПА

С.В. Натареев, Д.Е. Захаров, А.А. Сироткин, С.В. Беляев

Сергей Валентинович Натареев \*, Дмитрий Евгеньевич Захаров, Алексей Александрович Сироткин  
Кафедра машин и аппаратов химических производств, Ивановский государственный химико-технологический университет, просп. Шереметевский, 7, Иваново, Российская Федерация, 153000  
E-mail: natoret@mail.ru \*, dimazah16@ya.ru, komradquad@rambler.ru

Сергей Валерьевич Беляев  
Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, просп. Строителей, 33, Иваново, Российская Федерация, 153040  
E-mail: sergej\_belyaev@mail.ru

*Целью данной работы является дальнейшее развитие аналитической теории ионного обмена в области решения краевых задач нестационарного переноса вещества в телах канонической формы с учетом изменения концентрации раствора и характера движения фаз в аппарате проточного типа. Предложено математическое описание процесса ионообменной очистки раствора на частицах ионита цилиндрической формы в аппарате проточного типа. При разработке математического описания использовались следующие допущения: ионит является монодисперсным, начальное распределение вещества в ионите равномерное, равновесие ионообменного процесса описывается уравнением изотермы адсорбции Генри, скорость процесса лимитируется как внутренней, так и внешней диффузией, структура потока жидкой фазы в аппарате описывается моделью идеального перемешивания, в аппарат поступает раствор с постоянным объемным расходом и постоянной концентрацией вещества, кинетические и гидродинамические параметры процесса являются постоянными величинами. Математическое описание включает следующие уравнения: уравнение диффузии целевого компонента в зерне ионита, уравнение изотермы ионного обмена, уравнение для определения средней концентрации вещества в частице ионита, уравнение материального баланса аппарата идеального смешения проточного типа, начальные и граничные условия. Для решения поставленной задачи был использован метод интегральных преобразований Лапласа. Полученное уравнение позволяет проанализировать влияние объемного расхода раствора, подаваемого в аппарат, соотношения объемов твердой и жидкой фаз в аппарате, диаметра частицы и других параметров процесса на распределение концентрации вещества по внутренней координате твердого тела. Разработанная математическая модель используется для исследования десорбции ионов меди из модифицированного поликапроамидного волокна раствором серной кислоты.*

**Ключевые слова:** ионный обмен, аппарат идеального смешения проточного типа, математическая модель

## ION EXCHANGE ON A FIBROUS ION EXCHANGER IN A FLO-TYPE CAPACITIVE APPARATUS

S.V. Natareev, D.E. Zakharov, A.A. Sirotkin, S.V. Belyaev

Sergey V. Natareev \*, Dmitriy E. Zakharov, Aleksey A. Sirotkin

Department of Machines and Apparatus of Chemical Production, Ivanovo State University of Chemistry and Technology, Sheremetievskiy ave., 7, Ivanovo, 153000, Russia

E-mail: natoret@mail.ru \*, dimazah16@ya.ru, komradquad@rambler.ru

Sergey V. Belyaev

Department of Natural Science Disciplines, Ivanovo Fire and Rescue Academy of State Firefighting Service of Ministry of Russian Federation for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, Stroitelei ave., 33, Ivanovo, 153040, Russia

E-mail: sergej\_belyaev@mail.ru

*The objective of this study is to elaborate the analytical theory of ion exchange in the field of solving the boundary value problems of non steady state mass transfer in solids with a canonical form taking into account a change in the concentration of the solution and the character of movement of the phases in a flow apparatus. The mathematical description of the process of ion-exchange solution purification on ionite particles of cylindrical shape in a batch flow apparatus was developed. At the developing mathematical description the following assumptions were used: the ionite is monodisperse, uniform initial distribution of substances in the ionite, the ion exchange equilibrium is described by Henry equation, the rate of the process is limited by both internal and external diffusion, the flow pattern of the liquid phase in the apparatus is described by the perfect mixing model, the solution with the constant volumetric flow rate and the constant concentration of the substance is supplied to the apparatus, kinetic and hydrodynamic process parameters are constants. Mathematical description includes the following equations: the diffusion equation of ionite, isotherm equation ion exchange, the equation for average concentration of the substance in the ionite, the material balance equation for a perfect mixing flow apparatus, initial and boundary conditions. To solve boundary value problem, we use the integral Laplace transformations. The obtained equation allows to analyze the effect of the volumetric flow rate of the solution supplied to a flow apparatus, the ratio of the volumes of solid and liquid phases in the apparatus, the diameter of the particle, and other parameters of the process on the concentration distribution of a substance along the internal coordinate of the solid. The developed mathematical model is used to study the desorption of copper ions from the modified polycapromide fiber with sulfuric acid solution.*

**Key words:** ion exchange, perfect-mixing flow apparatus, mathematical model

### Для цитирования:

Натареев С.В., Захаров Д.Е., Сироткин А.А., Беляев С.В. Ионный обмен на волокнистом ионите в емкостном аппарате проточного типа. *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2019. Т. 62. Вып. 1. С. 107–113

### For citation:

Natareev S.V., Zakharov D.E., Sirotkin A.A., Belyaev S.V. Ion exchange on a fibrous ion exchanger in a flo-type capacitive apparatus. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2019. V. 62. N 1. P. 107–113

Для описания кинетики ионного обмена применяется целая иерархия математических моделей разной степени детализации и сложности [1-6]. В простейшем случае обмен ионами между ионитом и раствором представляет собой совокупность диффузионных процессов и химической реакции обмена ионов, которая протекает практически мгновенно [1]. Аналитическое решение задачи нестационарной диффузии, лимитируемой

внутренним и внешним сопротивлениями массопереносу, при линейной изотерме адсорбции и постоянной концентрации раствора для тела канонической формы (бесконечной пластины, бесконечного сплошного цилиндра, шара) может быть получено по аналогии с известной задачей о поглощении теплоты твердым телом при граничных условиях третьего рода [7-9]. В работах [10] приведены решения для неселективного обмена

(линейная изотерма) для ограниченного объема раствора при смешаннодиффузионной кинетике. Математические модели массообмена между твердой и жидкой фазами в аппарате полупериодического действия (периодического по твердой фазе и непрерывного по жидкой) полного смешения приведены в [11, 12]. Ранее авторами получены аналитические решения задач о нестационарных полях концентрации в твердом теле пластинчатой формы [13] и шаре [14], помещенных в аппарат полного смешения проточного типа. Данная работа является продолжением начатых в работах [13, 14] исследований и посвящена математическому моделированию ионного обмена на ионите в форме бесконечного цилиндра в полупериодическом процессе. На рис. 1 показана схема работы емкостного аппарата проточного типа с мешалкой, в котором протекает процесс регенерации ионита. Перед началом процесса в аппарат помещаются раствор объемом  $V$  с начальной концентрацией  $C_0$  и ионит объемом  $\bar{V}$  с начальной концентрацией целевого компонента  $\bar{C}_0$ . С целью интенсификации процесса ионного обмена суспензия ионит–раствор перемешивается мешалкой. В аппарат поступает регенерационный раствор с объемным расходом  $Q$  и концентрацией вещества  $C_{\text{вх}}$ . Одновременно из аппарата выводится равное количество раствора с концентрацией  $C(\tau)$ , которая равна концентрации раствора внутри аппарата.

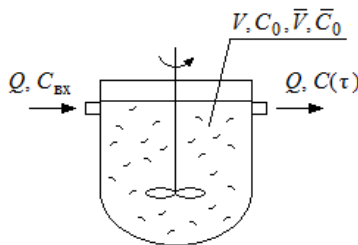


Рис. 1. Схема емкостного аппарата проточного типа  
Fig. 1. Diagram of a flow-type capacitive device

При формулировке математической модели примем следующие условия и допущения: 1) твердая фаза состоит из  $N$  тел цилиндрической формы, у которых длина бесконечно велика по сравнению с их диаметром; 2) диаметр всех тел одинаков; 3) обмен ионами между поверхностью цилиндра и раствором происходит одинаково на всей поверхности; 4) скорость процесса определяется как внешней, так и внутренней диффузией; 5) равновесие в системах ионит–раствор описывается уравнением изотермы адсорбции Генри; 6) кинетические коэффициенты постоянны; 7) раствор и ионит пол-

ностью перемешиваются в емкостном аппарате; 8) в аппарат поступает раствор с постоянным объемным расходом и одновременно из аппарата удаляется равное количество раствора.

С учетом принятых допущений математическое описание процесса ионного обмена включает следующие уравнения:

- характеристическое уравнение полупериодического аппарата полного смешения:

$$V \frac{dC(\tau)}{d\tau} + \bar{V} \frac{d\bar{C}_{\text{cp}}(\tau)}{d\tau} = Q[C_{\text{вх}} - C(\tau)]; \quad (1)$$

- уравнение нестационарной диффузии в неограниченном цилиндре:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = \bar{D}_{\text{эф}} \left( \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{C}}{\partial r} \right) \quad (\tau > 0; 0 \leq r \leq R); \quad (2)$$

- уравнение изотермы ионного обмена:

$$\bar{C}_{\text{p}} = \Gamma C; \quad (3)$$

- уравнение для определения средней концентрации вещества в частице ионита:

$$\bar{C}_{\text{cp}}(\tau) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \bar{C}(r, \tau) dr; \quad (4)$$

- начальные и граничные условия:

$$\bar{C}(r, 0) = \bar{C}_{\text{cp}}(0) = \bar{C}_0; \quad C(0) = C_0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{C}(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad \bar{C}(0, \tau) \neq \infty; \quad (6)$$

$$\bar{D}_{\text{эф}} \frac{\partial \bar{C}(R, \tau)}{\partial r} = \beta [C(\tau) - C_{\text{гр}}(\tau)], \quad (7)$$

где  $C$  – концентрация раствора, кг-экв/м<sup>3</sup>;  $\bar{C}$  – концентрация вещества в ионите, кг-экв/м<sup>3</sup>;  $\bar{D}$  – коэффициент диффузии в ионите, м<sup>2</sup>/с;  $r$  – радиальная координата частицы, м;  $R$  – радиус цилиндрической частицы, м;  $V$  – объем раствора в аппарате, м<sup>3</sup>;  $\bar{V}$  – объем ионита в аппарате, м<sup>3</sup>;  $Q$  – расход раствора, м<sup>3</sup>/с;  $\beta$  – коэффициент массоотдачи в растворе, м/с;  $\tau$  – время, с;  $\Gamma$  – константа Генри; индексы: вх – входящий; гр – граница; р – равновесный; ср – средний; эф – эффективный.

Преобразуем уравнение (1) и (7) с помощью уравнения изотермы (3) и введем в рассмотрение новые переменные и безразмерные величины:

$$\bar{N}(\xi, Fo_m) = \frac{a_0 - \bar{C}(r, \tau)}{a_0}; \quad \bar{N}_{\text{cp}}(Fo_m) = \frac{a_0 - \bar{C}_{\text{cp}}(\tau)}{a_0};$$

$$N(Fo_m) = \frac{C_{\text{вх}} - C(\tau)}{C_{\text{вх}}}; \quad \bar{N}_0 = \frac{a_0 - \bar{C}_0}{a_0};$$

$$N_0 = \frac{C_{\text{вх}} - C_0}{C_{\text{вх}}}; \quad \xi = \frac{r}{R}; \quad Bi_m = \frac{\beta R}{\Gamma \bar{D}_{\text{эф}}}; \quad Fo_m = \frac{\bar{D}_{\text{эф}} \tau}{R^2};$$

$$\sigma = \frac{\bar{V} \Gamma}{V}; \quad \chi = \frac{Q R^2}{V \bar{D}_{\text{эф}}}. \quad (8)$$

Здесь  $a_0$  – обменная емкость ионита, кг-экв/м<sup>3</sup>;  $Bi_m$  – модифицированное число Био;  $Fo_m$  – число Фурье.

Система уравнений (1)–(7) в новых переменных (8) будет иметь вид:

$$\frac{dN(Fo_m)}{dFo_m} + \sigma \frac{d\bar{N}_{cp}(Fo_m)}{dFo_m} = -\chi N(Fo_m); \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{N}(\xi, Fo_m)}{\partial Fo_m} = \frac{\partial^2 \bar{N}(\xi, Fo_m)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{N}(\xi, Fo_m)}{\partial \xi} \quad (Fo_m > 0; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (10)$$

$$\bar{N}_{cp}(Fo_m) = 2 \int_0^1 \xi \bar{N}(\xi, Fo_m) d\xi; \quad (11)$$

$$\bar{N}(\xi, 0) = \bar{N}_0; N(0) = N_0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{N}(0, Fo_m)}{\partial \xi} = 0; \bar{N}(0, Fo_m) \neq \infty; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{N}(1, Fo_m)}{\partial \xi} = Bi_m [N(Fo_m) - \bar{N}(1, Fo_m)]. \quad (14)$$

Для решения краевой задачи (9)–(14) будем использовать метод интегральных преобразований Лапласа [15, 16].

Запишем операторное уравнение, соответствующее уравнению (10):

$$\frac{d^2 \bar{N}_L(\xi, s)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\bar{N}_L(\xi, s)}{d\xi} - s \bar{N}_L(\xi, s) + \bar{N}_0 = 0, \quad (15)$$

где  $s$  – комплексный параметр.

Общее решение операторного уравнения (15) с учетом условия симметрии (13) имеет вид [9]:

$$\bar{N}_L(\xi, s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = AI_0(\sqrt{s}\xi). \quad (16)$$

Среднее значение функции  $\bar{N}_L(\xi, s)$ :

$$\bar{N}_{cpL}(s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = \frac{2A}{\sqrt{s}} I_1(\sqrt{s}). \quad (17)$$

Запишем уравнение материального баланса (9) и граничное условие (14) в области изображений:

$$sN_L(s) - N_0 + \sigma [s\bar{N}_{cpL}(s) - \bar{N}_0] = -\chi N_L(s); \quad (18)$$

$$\frac{d\bar{N}_L(1, s)}{d\xi} = Bi_m [N_L(s) - \bar{N}_L(1, s)]. \quad (19)$$

Выразим из уравнения (18) функцию  $N_L(s)$  и подставим ее величину в условие (19):

$$\frac{d\bar{N}_L(1, s)}{d\xi} = Bi_m \left\{ \frac{N_0}{s + \chi} - \frac{\sigma [s\bar{N}_{cpL}(s) - \bar{N}_0]}{s + \chi} - \bar{N}_L(1, s) \right\} \quad (20)$$

Удовлетворим решения (16) и (17) условию (20), а затем из полученного соотношения найдем постоянную  $A$ , значение которой подставим в решение (16). Получаем:

$$\bar{N}_L(\xi, s) - \frac{\bar{N}_0}{s} = \frac{Bi_m [sN_0 - (s + \chi)\bar{N}_0] I_0(\sqrt{s}\xi)}{s(s + \chi) \left[ \left( \frac{2Bi_m\sigma}{s + \chi} + 1 \right) \sqrt{s} I_1(\sqrt{s}\xi) + Bi_m I_0(\sqrt{s}\xi) \right]} \quad (21)$$

Числитель и знаменатель в решении (21) являются обобщенными полиномами относительно  $s$ . Таким образом, все условия теоремы разложения соблюдены и ее можно применить для перехода от изображения к оригиналу

$$L^{-1} \left[ \frac{\Phi(s)}{\Psi(s)} \right] = \frac{\Phi(0)}{\Psi'(0)} + \frac{\Phi(-\chi)}{\Psi'(-\chi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(s_n)}{n \Psi'(s_n)} \exp(s_n Fo_m). \quad (22)$$

Полином  $\Psi(s)$  имеет следующие простые корни: 1)  $s = 0$  (нулевой корень), 2)  $s = -\chi$ , 3) бесчисленное множество корней  $s_n$ , определяемых из уравнения:

$$\left( \frac{2Bi_m\sigma}{s + \chi} + 1 \right) \sqrt{s} I_1(\sqrt{s}\xi) + Bi_m I_0(\sqrt{s}\xi) = 0. \quad (23)$$

Осуществив переход от модифицированных функций Бесселя к обычным и обозначив  $i\sqrt{s} = \mu$ , получаем

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu(\chi - \mu^2 + 2Bi_m\sigma)}{Bi_m(\chi - \mu^2)}. \quad (24)$$

В соответствии с соотношением (22) найдем вспомогательные величины и получим решение нашей задачи, которое запишем в прежних переменных:

$$F(r, \tau) = \frac{a_0 - \bar{C}(r, \tau)}{a_0 - C_0} = A \left( \frac{X_{ex} - X_0}{a_0 - C} \right) \Gamma \Gamma_0 \left( \sqrt{\chi} \frac{\rho}{P} \right) \varepsilon^{-\chi \frac{\bar{A}_{\phi} \tau}{P^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n C_n}{\mu_n} J_0 \left( \mu_n \frac{r}{R} \right) e^{-\mu_n^2 \frac{\bar{D}_{\phi} \tau}{R^2}}; \quad (25)$$

$$\text{где } A = \frac{Bi_m}{Bi_m(1 + \sigma)J_0(\sqrt{\chi}) - \sqrt{\chi}J_1(\sqrt{\chi})},$$

$$C_n = \mu_n^2 \left( \frac{C_{ex} - C_0}{a_0 - C_0} \right) \Gamma + \chi - \mu_n^2,$$

$$B_n = \frac{Bi_m}{\mu_n(\chi - \mu_n^2) \left[ \left( \frac{2Bi_m\sigma\mu_n}{(\chi - \mu_n^2)^2} + \frac{Bi_m}{2\mu_n} \right) J_1(\mu_n) + \left( \frac{1}{2} + \frac{Bi_m\sigma}{\chi - \mu_n^2} \right) J_0(\mu_n) \right]}$$

Уравнение (25) позволяет рассчитать распределение концентрации сорбируемых ионов по радиусу частицы цилиндрической формы в любой момент времени.

Если подставить в соотношение (4) вместо  $\bar{C}(r, \tau)$  решение (25), то после интегрирования получим:

$$F_{cp}(\tau) = \frac{a_0 - \bar{C}_{cp}(\tau)}{a_0 - C_0} = \frac{2A\Gamma\Gamma_1(\sqrt{\chi})}{\sqrt{\chi}} \left( \frac{C_{ex} - C_0}{a_0 - C} \right) e^{-\chi \frac{\bar{D}_{\phi} \tau}{R^2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n C_n}{\mu_n^2} J_1(\mu_n) e^{-\mu_n^2 \frac{\bar{D}_{\phi} \tau}{R^2}}. \quad (26)$$

Решение (26) позволяет определить среднюю концентрацию сорбируемых ионов в частице ионита цилиндрической формы в любой момент времени.

Используем равенство, отражающее тот факт, что скорость заполнения объема тела цилиндра сорбируемым веществом должна быть равна скорости, с которой сорбируемое вещество проходит через боковую поверхность этого тела:

$$\bar{V} \frac{d\bar{C}_{cp}(\tau)}{d\tau} = NS\bar{D}_{эф} \left. \frac{\partial \bar{C}(r,\tau)}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad (27)$$

где  $N$  – количество частиц ионита в аппарате,  $S$  – площадь боковой поверхности цилиндра,  $m^2$ .

Уравнение материального баланса (1) с учетом (27) может быть записано так:

$$V \frac{dC(\tau)}{d\tau} + NS\bar{D}_{эф} \left. \frac{\partial \bar{C}(r,\tau)}{\partial r} \right|_{r=R} = Q[C_{ex} - C(\tau)]. \quad (28)$$

Учтем, что  $\bar{V} = NSR/2$ . Если подставить в уравнение (28) вместо  $\bar{C}(x, \tau)$  решение (25), то после дифференцирования, принятия  $r = R$ , и интегрирования получим:

$$\theta(\tau) = \frac{C_{вх} - C(\tau)}{C_{вх} - C_0} = \left[ \frac{2A\sqrt{\chi}\sigma\bar{D}_3\tau J_1(\sqrt{\chi})}{R^2} + 1 \right] e^{-\chi \frac{\bar{D}_{эф}\tau}{R^2}} + 2\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n D_n}{\chi - \mu_n^2} J_1(\mu_n) \left( e^{-\mu_n^2 \frac{\bar{D}_{эф}\tau}{R^2}} - e^{-\chi \frac{\bar{D}_{эф}\tau}{R^2}} \right), \quad (29)$$

где  $D_n = \mu_n^2 + (\chi - \mu_n^2) \left( \frac{a_0 - \bar{C}_0}{C_{вх} - C_0} \right) \frac{1}{\Gamma}$ .

Уравнение (29) может быть использовано для расчета концентрации раствора на выходе из аппарата в любой момент времени.

Для проверки адекватности разработанной математической модели реальному процессу были проведены экспериментальные исследования процесса десорбции ионов меди из модифицированного поликапроамидного (ПКА) волокна раствором серной кислоты. Модификацию ПКА волокна осуществляли за счет химически инициированной привитой сополимеризации на его поверхности метакриловой кислоты. Для опытов использовали емкостной аппарат с эллиптическим днищем, в котором перемешивание суспензии проводили пропеллерной мешалкой. Число оборотов мешалки установили из предварительных опытов. При этом число оборотов мешалки практически не влияло на скорость ионного обмена. Концентрацию раствора серной кислоты на входе в аппарат принимали равной концентрации раствора внутри аппарата в начальный момент времени. В этом

случае уравнение (29) упрощается и может быть записано в виде:

$$\theta(\tau) = \frac{C(\tau)}{C_{вх}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n E_n J_1(\mu_n)}{\chi - \mu_n^2} \left( e^{-\mu_n^2 \frac{\bar{D}_{эф}\tau}{R^2}} - e^{-\chi \frac{\bar{D}_{эф}\tau}{R^2}} \right), \quad (30)$$

где  $E_n = \mu_n^2 + (\chi - \mu_n^2) \left( \frac{a_0 - \bar{C}_0}{C_{вх}} \right) \frac{1}{\Gamma}$ .

Коэффициент массоотдачи в растворе определяли из уравнения, полученного на основе модельных представлений теории обновления поверхностей [17]:

$$\beta = 2\sqrt{\frac{D}{\pi\tau}}, \quad (31)$$

Здесь  $D$  – коэффициент диффузии ионов в растворе,  $m^2/c$ ;  $\tau'$  – время обновления поверхности, определяемое из соотношения:

$$\tau' = \frac{d_v}{\omega_{об}}, \quad (32)$$

где  $d_v$  – диаметр волокна,  $\omega_{об}$  – скорость обтекания поверхности ионита жидкостью.

Величину  $\omega_{об}$  рассчитывали по уравнению [18]:

$$\omega_{об} = 0.1u_m \left( \frac{\lambda}{d_a} \right)^{1/3}, \quad (33)$$

где  $u_m$  – скорость на конце лопасти мешалки,  $m/c$ ;  $d_a$  – диаметр аппарата,  $m$ ;  $\lambda$  – масштаб турбулентной пульсации,  $m$ .

Согласно данным [18] примем  $\lambda = d_m$ .

Скорость на конце лопасти мешалки равна:

$$u_m = n\pi d_m, \quad (34)$$

где  $n$  – частота вращения мешалки,  $1/c$ ;  $d_m$  – диаметр мешалки,  $m$ .

Основные режимы работы аппарата и сорбционные характеристики изученной ионообменной системы [19, 20] приведены в таблице.

На рис. 2 изображены кривые распределения безразмерной концентрации ионов меди по внутренней координате частицы цилиндрической формы для различных моментов времени процесса ионного обмена.

На рис. 3 и 4 показаны в сравнении экспериментальные и расчетные кинетические кривые процесса ионообменной десорбции ионов меди из ПКА волокна и зависимости изменения концентрации ионов меди в растворе на выходе из аппарата от времени процесса.

Таблица

Характеристики процесса ионного обмена в аппарате  
Table. Characteristics of ion exchange process in apparatus

Показатель	Значение показателя
$V \cdot 10^4, \text{ м}^3$	8
$\bar{V} \cdot 10^5, \text{ м}^3$	8,05
$Q \cdot 10^4, \text{ м}^3/\text{с}$	1,6
$d_a, \text{ м}$	0,1
$d_m, \text{ м}$	0,03
$n, 1/\text{с}$	6
$C_{\text{вх}}, \text{ кг-экв}/\text{м}^3$	2
$C_0, \text{ кг-экв}/\text{м}^3$	2
$a_0, \text{ кг-экв}/\text{м}^3$	1,6
$\bar{D}_{\text{эф}} \cdot 10^{12}, \text{ м}^2/\text{с}$	2,61
$D \cdot 10^9, \text{ м}^2/\text{с}$	1
$\Gamma$	0,8
$d_b \cdot 10^4, \text{ м}$	2,6
$v \cdot 10^6, \text{ м}^2/\text{с}$	1
$\beta \cdot 10^4, \text{ м}/\text{с}$	3,6

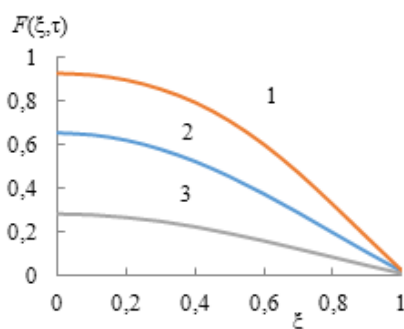
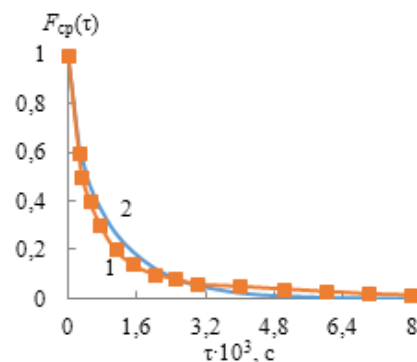
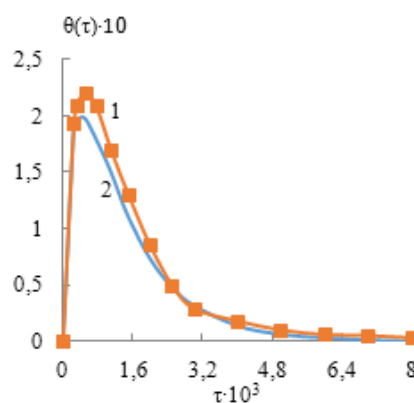
Рис. 2. Расчетные поля распределения безразмерной концентрации по безразмерному радиусу частицы материала: время  $\tau \cdot 10^{-3}, \text{ с}$ : 1 – 0,5; 2 – 1; 3 – 2

Fig. 2. Calculated fields of distribution of dimensionless concentration on dimensionless radius of particles of material: time,  $\tau \cdot 10^{-3}, \text{ s}$ : 1 – 0.5; 2 – 1; 3 – 2

Из данных рисунков видно, что процесс ионного обмена протекает при переменной концентрации раствора. Сначала концентрация ионов меди в аппарате увеличивается до максимального значения, что связано с интенсивным процессом регенерации волокнистого катионита. Затем кон-

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Kalinichev A.I.** Diffusional model for intraparticle ion exchange kinetics in nonlinear selective systems. In: Ion Exchange. Eds. by D. Muraviev, V. Gorshkov, A. Warshawsky. N.Y. Basel: M. Dekker. 2000. P. 345-379.
2. **Груздева А.Н., Хамизов Р.Х., Золотарев П.П.** О теоретическом описании процессов внутридиффузионной сорбции и десорбции в ионообменных сорбентах. *Сорбц. и хроматограф. процессы*. 2008. Т. 8. Вып.1. С. 99-105.
3. **Полуляхова Н.Н.** Исследование кинетики сорбции на синтезированном ионите. *Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 4*. 2010. № 2. С. 71-78.
4. **Zhao G., Wu X., Tan X., Wang X.** Sorption of heavy metal ion from aqueous solutions: A review. *Open Colloid Sci. J.* 2011. N 4. P. 19-31.

Рис. 3. Кинетические кривые ионного обмена: 1 – экспериментальные данные, 2 – расчетные данные  
Fig. 3. Kinetic curves of ion exchange: 1 – experimental data, 2 – calculated dataРис. 4. Концентрационные кривые ионного обмена: 1 – экспериментальные данные, 2 – расчетные данные  
Fig. 4. Concentration curves of ion exchange: 1 – experimental data, 2 – calculated data

центрация раствора постепенно уменьшается и асимптотически приближается к нулю вследствие уменьшения скорости ионного обмена на последних стадиях процесса и поступления в аппарат исходного раствора кислоты, не содержащего ионы меди. Расхождение результатов расчета и эксперимента не превышает 8 %. Разработанная математическая модель может быть рекомендована для практического применения.

## REFERENCES

1. **Kalinichev A.I.** Diffusional model for intraparticle ion exchange kinetics in nonlinear selective systems. In: Ion Exchange. Eds. by D. Muraviev, V. Gorshkov, A. Warshawsky. N.Y. Basel: M. Dekker. 2000. P. 345-379.
2. **Gruzdeva A.N., Khamizov R.Kh., Zolotarev P.P.** Theoretical description of the processes of intra-diffusion sorption and desorption in ion-exchange sorbents. *Sorbts. i khromatograf. Protsestry*. 2008. V. 8. N 1. P. 99-105 (in Russian).
3. **Polulyakhova N.N.** Study of kinetics of adsorption on synthesized ionite. *Vestn. Sankt-Peterburg. Un-ta. Ser. 4*. 2010. N 2. P. 71-78 (in Russian).
4. **Zhao G., Wu X., Tan X., Wang X.** Sorption of heavy metal ion from aqueous solutions: A review. *Open Colloid Sci. J.* 2011. N 4. P. 19-31.

5. Тимофеев К.Л., Усольцев А.В., Краюхин С.А., Мальцев Г.И. Кинетика сорбции ионов индия, железа и цинка слабокислотными катионитами. *Сорбц. и хроматограф. процессы*. 2015. Т. 15. Вып. 5. С. 720-730.
6. Долгоносов А.М., Хамизов Р.Х., Крачак А.Н., Прудковский А.Г., Колотилина Н.К. Нелинейная кинетика многокомпонентного ионного обмена. Макроскопическая модель и немонотонные кривые. *Сорбц. и хроматограф. процессы*. 2014. Т. 14. Вып. 5. С. 724-734.
7. Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А. Теплообмен. М.: Изд. МЭИ. 2005. 550 с.
8. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк. 2001. 550 с.
9. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк. 1967. 600 с.
10. Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико-технологических процессах. М.: КолосС. 2010. 478 с.
11. Рудобашта С. П., Кошелева М.К., Карташов Э.М. Математическое моделирование экстрагирования целевого компонента из тел цилиндрической формы в полунепрерывном процессе. *Инж.-физич. журн.* 2016. Т. 89. № 3. С. 595-602.
12. Рудобашта С.П., Кошелева М.К., Карташов Э.М. Моделирование экстрагирования целевого компонента из тел сферической формы в полунепрерывном процессе. *Инж.-физич. журн.* 2017. Т. 90. № 4. С. 841-849.
13. Натареев С.В., Коккина Н.Р., Натареев О.С., Дубкова Е.А. Массоперенос в системе с твердой фазой. *Теоретич. осн. химич. технол.* 2015. Т. 49. № 1. С. 74-78. DOI: 10.7868/S0040357115010091.
14. Натареев С.В., Венкин Е.Н., Натареев О.С. Массоперенос в процессе сушки влажного материала при конвективном подводе теплоты. *Изв. вузов Химия и хим. технология*. 2012. Т. 55. Вып. 3. С. 104-108.
15. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник для вузов. М.: Интеграл-Пресс. 2002. Т. 2. 544 с.
16. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2002. 228 с.
17. Дмитриев Е.А. Явления переноса массы в примерах и задачах. М.: РХТУ. 2005. 120 с.
18. Фроленкова Т.М., Корольков Н.М., Карклинь Р.Я. Расчет коэффициентов массопередачи для процесса ионообменной сорбции в аппарате с мешалкой на основе современных теорий массопереноса. Сб. ст. Массообмен в химической технологии. Рига. 1971. С. 33-37.
19. Натареев С.В., Имад Абу-Неадж. Процессы сорбции и десорбции ионов  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Cu}^{2+}$  и  $\text{Fe}^{3+}$  на модифицированном поликаприамидном волокне. Межвузов. сб. науч. тр. Физика, химия и механика трибосистем. Под ред. В.Н. Латышева. Иваново: Иван. гос. ун-т. 2002. С. 108-109.
20. Натареев С.В., Имад Абу-Неадж. Процессы ионообменной сорбции и десорбции ионов тяжелых металлов на волокнистом ионите. Тез. докл. VIII Междунар. конф. Проблемы сольватации и комплексообразования в растворах. Иваново. 2001. С. 221-222.
5. Timofeev K.L., Usoltsev V.A., Krayukhin S.A., Maltsev G.I. Kinetics of sorption of ions of indium, iron and zinc by weak acid cationites. *Sorbts. i Khromatograf. Protsestry*. 2015. V. 15. N 5. P. 720-730 (in Russian).
6. Dolgonosov A.M., Khamisov R.H., Krachak A.N., Prudkovsky A.G., Kolotilina N.K. Non-linear kinetics of multicomponent ion exchange. Macroscopic model and non-monotonic curves. *Sorbts. i Khromatograf. Protsestry*. 2014. V. 14. N 5. P. 724-734 (in Russian).
7. Tsvetkov F.F., Grigoriev B.A. Heat and mass transfer. M.: Izd. MEI. 2005. 550 p. (in Russian).
8. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. M.: Vyssh. Shkola. 2001. 550 p. (in Russian).
9. Lykov A.V. The heat conductivity theory. M.: Vyssh. shkola. 1967. 600 p. (in Russian).
10. Rudobashta, S.P., Kartashov E.M. Diffusion in chemical-technological processes. M.: KolosS. 2010. 478 p. (in Russian).
11. Rudobashta, S.P., Kosheleva M.K., Kartashov E.M. Mathematical modeling of extraction of the target component from the bodies of cylindrical shape in a semi-continuous process. *Inzh.-Fizich. Zhurn.* 2016. V. 89. N 3. P. 595-602 (in Russian).
12. Rudobashta, S.P., Kosheleva M.K., Kartashov E.M. Modeling of the extraction of the target component from the bodies of spherical shape in a semi-continuous process. *Inzh.-Fizich. Zhurn.* 2017. V. 90. N 4. P. 841-849 (in Russian).
13. Natareev S.V., Kokina N.R., Natareev O.S., Dubkova E.A. Mass transfer in a system with a solid. *Teoretich. Osn. Khimich. Tekhnol.* 2015. V. 49. N 1. P. 74-78 (in Russian). DOI: 10.7868/S0040357115010091.
14. Natareev S.V., Venkin E.N., Natareev O.S. Mass transfer in drying process of moist material at convective supply of heat. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2012. V. 55. N 3. P. 104-108 (in Russian).
15. Piskunov N.S. Differential and integral calculus: textbook for universities. M.: Integral-Press. 2002. V. 2. 544 p. (in Russian).
16. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. Integral transformations and operational calculus. M.: Izd. MGTU im. N. Eh. Bauman. 2002. 228 p. (in Russian).
17. Dmitriev E.A. Phenomenon of mass transfer in examples and problems. M.: RCTU. 2005. 120 p. (in Russian).
18. Frolenkova T.M., Korolkov N.M., Karklin R.J. Calculation of coefficients of mass transfer for the process of ion exchange in apparatus with stirrer on the basis of modern theories of mass transfer. Mass transfer in chemical technology. Riga. 1971. P. 33-37 (in Russian).
19. Natareev S.V., Imad Abu-Neadz. Processes of sorption and desorption of ions  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Cu}^{2+}$  and  $\text{Fe}^{3+}$  modified polycapromamide fiber. Intern. sat nauch. Tr. Physics, chemistry and mechanics of tribosystems. Under the editorship of V. N. Latysheva. Ivanovo: Ivan. State University. 2002. P. 108-109 (in Russian).
20. Natareev S.V., Imad Abu-Neadz. Processes of ion exchange sorption and desorption of heavy metal ions on fibrous ionite. Tes. dokl. VIII Mezhdunar. conf. Problems of solvation and complex formation in solutions. Ivanovo. 2001. P. 221-222 (in Russian).

Поступила в редакцию 28.03.2018  
 Принята к опубликованию 26.10.2018

Received 28.03.2018  
 Accepted 26.10.2018